

ガウス整数環における abc 予想

中等教育教員養成課程 数学専攻 堀岡 大暉

2020年, 未解決問題がひとつ姿を消した. その正体は abc 予想である. abc 予想はエステルレとマッサーにより 1985年に提出され, 2012年8月に望月新一教授が解決したという論文を提出し, 2020年2月専門誌の査読を通過したというニュースが出された. 査読を通過した年, 私たちは幸運なことに abc 予想について学ぶことができた. 学ぶ中で私が衝撃を受けたものがある. それは, 実係数多項式環においては abc 予想が成り立つことである. さらに驚くことに私が理解できる範囲の証明であったことであった.

そこで本論文では, ガウス整数環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ における abc 予想について考察する. 具体的には次の予想である.

予想 5. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \setminus \{0\}$ がどの2つも互いに素で $\alpha + \beta = \gamma$ を満たすとき, 次が成り立つ:

$$\max(N(\alpha), N(\beta), N(\gamma)) < N(\text{Rad}(\alpha\beta\gamma)).$$

実は, この予想は成り立たない. 有理整数環 \mathbb{Z} におけるこの予想に無数の反例があり, その反例が予想の反例となるのだ. 本論文ではそのことを示し, さらに, 整数の反例では見られない予想の新たな反例を与える. また, 本論文では, abc 予想の他に, カタラン予想やフェルマーの最終定理のガウス整数環版も考察する. 特に, この予想を少し弱めた下に述べる予想が成り立つと仮定することで, ガウス整数環におけるフェルマーの最終定理のほとんどを解決できることを確認する.

予想 6. 次が成り立つような整数 $A > 1$ が存在する:

任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \setminus \{0\}$ に対し, どの2つも互いに素で $\alpha + \beta = \gamma$ を満たすとき,

$$\max(N(\alpha), N(\beta), N(\gamma)) < N(\text{Rad}(\alpha\beta\gamma))^A$$

が成り立つ.

本論文の最後では, 一般のユークリッド整域における abc 予想を, 次のように定式化する.

予想 7. R をユークリッド整域とし, E をユークリッド付値とする. $\alpha, \beta, \gamma \in R \setminus \{0\}$ が, どの2つも互いに素で $\alpha + \beta = \gamma$ を満たすとき, 次が成り立つ:

$$\max(E(\alpha), E(\beta), E(\gamma)) < E(\text{rad}(\alpha\beta\gamma)).$$