令和２年度卒業研究概要

多項式の ABC 定理に関する考察

初等教育教員養成課程　数学選修　倉田 晃希

本論文では, 整数の世界では証明が困難な abc 予想やフェルマーの最終定理, カタラン予想といった定理を多項式環で考察することを目的としている．本論文で扱う多項式の ABC 定理とは, 次のような定理である.

定理 1 (**ABC 定理**)**.** $A, B, C \in F[t]$ を, すべてが定数ではなく, どの 2 つも互いに素な多項式で, さらに $A + B = C$ を満たすものとする．このとき

$$\max(\deg A, \deg B, \deg C) < \deg \operatorname{rad}(ABC)$$

が成り立つ.

ここで, F は $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ のいずれかを表し, $\deg A$ は多項式 A の次数, $\operatorname{rad}(A)$ は A の素因子すべての積を表す.

本論文では, ABC 定理を用いて, フェルマーの最終定理の多項式版定理をさらに強くした定理 4, およびカタラン予想の多項式版定理である定理 6 を証明する.

定理 4. $p, q, r \in \mathbb{N}$ が $1/p + 1/q + 1/r \leq 1$ を満たすとき,

$$X^p + Y^q = Z^r$$

を満たす多項式 $X, Y, Z \in F[t]$ で, すべてが定数でなくどの 2 つも互いに素なものは存在しない.

定理 6. $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し,

$$X^m - Y^n = 1$$

を満たす定数でない多項式 $X, Y \in F[t]$ は存在しない.

さらに研究を進め, 定理 6 に類似した次の定理を証明した.

定理 7. $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対し,

$$X^m - Y^n = t$$

を満たす定数でない多項式 $X, Y \in F[t]$ と m, n の組は, ${}^{\forall} a \in F$ に対して

$$X = \frac{1}{2}(at + a^{-1}), \quad Y = \pm\frac{1}{2}(at - a^{-1}), \quad m = n = 2$$

のみである.