令和３年度卒業研究概要

素式について

中等教育教員養成課程　数学専攻　蟹江 尚裕

本論文は, アイゼンシュタインの規準を証明し, またそれを用いて素式の分類を試みることを目的とする. ここで, 素式とは次のように定義される多項式である.

定義 1. F を体とする. 定数でない多項式 $P \in F[t]$ に対し,

$$P \in (A), A \in F[t] \text{ ならば}, (A) = (P) \text{ または } (A) = (1)$$

が成り立つとき, P を $F[t]$ の**既約多項式**という. また, 最高次の係数が 1 である多項式を**モニックな多項式**といい, モニックな既約多項式を**素式**という.

本論文の前半では, 次に述べるアイゼンシュタインの規準を本論文の主定理とし, これを証明した.

定理 1 (アイゼンシュタインの規準). 定数でないモニックな多項式 $A \in \mathbb{Z}[t]$ に対し,

$$A = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

とするとき, $a_0,\ a_1, \ldots,\ a_{n-1} \in (p)$ および $a_0 \notin (p^2)$ を満たす素数 p が存在すれば A は $\mathbb{Q}[t]$ の素式である.

本論文の後半では, まず初めに, $\mathbb{C}$ 上及び $\mathbb{R}$ 上の素式の分類を与えた.

命題 7. $P \in \mathbb{C}[t]$ に対し, 次の条件は同値である:

(i) P は素式である.

(ii) $P = t - a$ となる $a \in \mathbb{C}$ が存在する.

命題 10. $P \in \mathbb{R}[t]$ に対し, 次の条件は同値である:

(i) P は素式である.

(ii) P は次のどちらかの形をしている.

(ii-1) $P = t - a$ となる $a \in \mathbb{R}$ が存在する.

(ii-2) $P = t^2 + bt + c, b^2 - 4c < 0$ となる $b, c \in \mathbb{R}$ が存在する.

続いて, $\mathbb{Q}$ 上における素式の無限族を, 定理 1 を用いて与えた.

例 4. 素数 p に対し, $P = t^{p-1} + t^{p-2} + \cdots + 1$ は $\mathbb{Q}[t]$ の素式となる.

例 5. $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, $P = t^{2^m} + 1$ は $\mathbb{Q}[t]$ の素式となる.

今後は, 上で与えた以外の $\mathbb{Q}$ 上の素式の無限族を見つけることを課題とする.