令和 2 年度卒業研究概要

強い abc 予想を用いたフェルマーの大定理の解法

中等教育教員養成課程　数学専攻　秋本 健貴

本論文の目標は, 強い abc 予想を用いてフェルマーの大定理の証明を行うことである.

フェルマーの大定理とは, 次のような定理である.

フェルマーの大定理. $^{\forall}n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ に対し,

$$x^n + y^n = z^n$$

となる $x, y, z \in \mathbb{Z}_{>0}$ は存在しない.

この定理はワイルズによって証明されたが, 証明には高度な数学が駆使されており, 理解は非常に困難である. しかし, 次に述べる abc 予想を用いれば, 簡単に証明ができる.

abc 予想. 次を満たす $N \in \mathbb{Z}_{>1}$ が存在する:

$$^{\forall}(a, b, c) \in \mathbf{abc} \text{ に対し, } c < (\mathrm{rad}(abc))^N.$$

ここで, **abc** は,

$$\mathbf{abc} = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 | \, (a, b) = (b, c) = (c, a) = (1), \ 0 < a < b < c, \ a + b = c\}$$

で定義される集合であり, $\mathrm{rad}(abc)$ は abc の素因数すべての積を表す. この abc 予想は, 2012 年に望月新一氏によって解決したとする論文が公開され, 2020 年にその証明が認められた. 望月氏によるこの予想の証明では, 整数 N の具体的な値は特定できていないが, 実際にはこの予想は $N = 2$ で成り立つと考えられている.

予想 3. $^{\forall}(a, b, c) \in \mathbf{abc}$ に対し,

$$c < (\mathrm{rad}(abc))^2.$$

そこで, 本論文では, この予想 3 が成り立つとして, 6 以上の n についてフェルマーの大定理が成り立つことを証明した後に, $n = 3, 4, 5$ の場合の証明を個別にすることで, フェルマーの大定理の証明を完結させる. 具体的には, 以下の命題を証明していく.

命題 2. 予想 3 が成り立つならば, $^{\forall}n \in \mathbb{Z}_{\geq 6}$ に対し, $x^n + y^n = z^n$ となる $x, y, z \in \mathbb{Z}_{>0}$ は存在しない.

命題 12. $x^3 + y^3 = z^3$ となる $x, y, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は存在しない.

命題 14. $x^4 + y^4 = z^2$ となる $x, y, z \in \mathbb{Z}_{>0}$ は存在しない.

命題 19. $x^5 + y^5 = z^5$ となる $x, y, z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は存在しない.