令和２年度卒業研究概要

abc 予想とその応用

中等教育教員養成課程　数学専攻　大江 隼介

私は, 代数学を専門とするゼミに入り, 数の世界について専門的に学んだ. その中で特に興味を持ったのは, 次に述べる abc 予想である.

予想 4 (abc 予想). 任意の実数 $k > 1$ に対し, $\mathbf{abc}[k]$ は有限集合となる.

ここで, $\mathbf{abc}[k]$ は

$$a + b = c, a < b < c, c \geq (\mathrm{rad}(abc))^k$$

を満たすどの 2 つも互いに素な正の整数の組 (a, b, c) の集合で, $\mathrm{rad}(abc)$ は abc の素因子のすべての積を表す. abc 予想は, そのシンプルさとは対照的に証明において強力な力を発揮する. 例えば, 次のような予想がある.

予想 6 (ビール予想). $p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ に対し, どの 2 つも互いに素な $x, y, z \in \mathbb{Z}_{>0}$ で,

$$x^p + y^q = z^r$$

を満たすものは存在しない.

このビール予想はいまだに未解決の予想となっているが, 次に述べる強い abc 予想を仮定すると, この予想が解決される.

予想 5 (強い abc 予想). 任意の実数 $k > 1$ に対し, $\mathbf{abc}[k]$ は有限集合であり, そのすべてをリストアップできる.

本論文では, $k = 12/11$ に対する強い abc 予想の下でビール予想が解決されることを示す. また, $k = 6/5$ に対する強い abc 予想の下でカタラン予想が解決されることも示す. ここで, カタラン予想とは次の予想である.

予想 7 (カタラン予想). $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}, m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ で

$$x^m - y^n = 1$$

を満たすものは, $(m, n, x, y) = (2, 3, 3, 2)$ だけである.

さらに, 研究の結果によって得られた, $\mathbf{abc}[1]$ に属する元を無数に与える次の命題を証明する.

命題 6. n を奇数とする. このとき, $n < 2^r$ を満たす $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し,

$$(a, b, c) = (1, n^{2^r} - 1, n^{2^r}) \in \mathbf{abc}[1].$$