令和 2 年度卒業研究概要

メルセンヌ数と素数判定

初等教育教員養成課程　数学選修　霜 朱音

本論文では, メルセンヌ数の素数性について考察し, メルセンヌ数の素数判定を行うことを目標とする. まず, メルセンヌ数は次のように定義される整数である.

定義 1. 素数 p に対し, $M_p = 2^p - 1$ をメルセンヌ数という.

ここで $1 < p < 20$ のメルセンヌ数 M_p を次の表に挙げる.

p	2	3	5	7	11	13	17	19
M_p	3	7	31	127	2047	8191	131071	524287

この表において, $M_p = 3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287$ は素数であるが,

$$M_{11} = 2047 = 23 \cdot 89$$

は素数でない. つまり, メルセンヌ数には素数になるものと素数にならないものがある. そこで, 次の命題を用いてメルセンヌ数の素数判定を行う.

命題 6. p を奇素数, l を素数とする. $p \mid M_l$ ならば, $l \mid p - 1$ である.

命題 6 を用いたメルセンヌ数の素数判定は, メルセンヌ数が大きくなるにしたがって莫大な計算量になる. そこで, その素数判定を発展させて, メルセンヌ数の素因数分解を行うアルゴリズムを与える. 大きなメルセンヌ数に対して, 計算量を少しでも軽減できるようなアルゴリズムである. このアルゴリズムを用いてプログラムを作成し, $M_p \, (30 < p < 100)$ の素因数分解を表にして与えている.

さらに本論文ではメルセンヌ数と密接に関わる完全数についても述べる. 完全数は, 次のように定義される整数である.

定義 2. $a \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, a の正の約数の和を $\sigma(a)$ と表す. また, $\sigma(a) = 2a$ を満たす a を完全数という.

メルセンヌ数と完全数との関係については, 次の命題を示す.

命題 5. 素数 p に対し,

$$M_p = 2^p - 1 : \text{素数} \Leftrightarrow a = 2^{p-1}(2^p - 1) : \text{完全数}.$$

すなわち, メルセンヌ素数と偶数の完全数は 1 対 1 に対応する.