令和元年度卒業研究概要

定規とコンパスで作図可能な正多角形について

初等教育教員養成課程　数学選修　杉江 和未

この卒業論文の目的は正 n 角形の作図可能性を考察することである. n を 3 以上の整数とし, 正 n 角形が作図可能であるための n に関する必要条件を 1 つ与える.

定義 2. 無理数 α に対し, α を解にもつ次数が最小の有理数係数方程式の次数が n のとき, α は n 次の無理数という.

命題 2. 作図可能な無理数は 2^m 次の無理数である.

正 n 角形が作図可能であることは円の n 等分が可能であることと同値であり, 円の n 等分が可能であることと $\cos(2\pi/n)$ かつ $\sin(2\pi/n)$ という長さが作図可能であることは同値である. したがって, 次が得られる.

命題 3. $\cos(2\pi/n)$, $\sin(2\pi/n)$ が 2^m 次 ($m \in \mathbb{Z}$, $m \geqq 0$) の無理数であることは, 正 n 角形が作図可能であるための必要条件である.

さらに, d 次ガウス周期や 4 次ガウス周期の基本定理を導入し, 命題 3 より, $\cos(2\pi/17)$ の値を求めて正 17 角形の作図可能性を調べる. その具体的な値は次のようになる:

$$\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{16}\left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \sqrt{68+12\sqrt{17}+2\left(-1+\sqrt{17}\right)\sqrt{34-2\sqrt{17}}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right).$$

そして, 論文の最後において, 正 n 角形が作図可能であるための必要十分条件を与えたガウスの作図可能定理を紹介する.

以下でこの卒業論文の構成を述べる. まず, 1 節では基本的な作図方法を提示し, 四則演算と平方根で表される数は作図可能であることを証明する. 次に 2 節で, ζ という複素数を導入し, 正 n 角形が作図可能であるための n に関する必要条件を 1 つ与える. そして, 実際に正 5 角形と正 7 角形の作図可能性を調べる. 3 節では, 正 17 角形の作図可能性の考察に必要とする原始根やガウス周期を導入し, それらに関する命題を述べる. 4 節で, ガウス周期を用いて上記 $\cos(2\pi/17)$ の具体的な値を計算し, 正 17 角形の作図可能性を調べる. 5 節では, ガウスの作図可能定理を紹介し, 作図可能なすべての正 p 角形を述べる.