令和元年度卒業研究概要

平方剰余の相互法則の証明

中等教育教員養成課程　数学専攻　山田 芽唯

本論文では, 次に述べる平方剰余の相互法則を証明することを目標としている.

定理 1 (平方剰余の相互法則). p, l を奇素数とし, $p \neq l$ とする. このとき,

$$\left(\frac{l}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{l-1}{2}} \left(\frac{p}{l}\right)$$

が成り立つ.

この定理の証明に重要なガウス周期の定義と, それに関する命題を 3 つ述べる.

定義 12. $a \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{F}_p$ に対し, $a\beta = \overline{a}\beta$ と定義し, 複素数 $[a]_2$ を

$$[a]_2 = \sum_{\beta \in H_2} \zeta^{a\beta}$$

で定義する. これを **2 次のガウス周期**という.

命題 23. p を奇素数とし, $\varphi(x)$ を,

$$\varphi(x) = x^2 + x + \frac{1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p}{4}$$

とすると, $[1]_2, [g]_2$ は $\varphi(x) = 0$ の 2 解である.

命題 26. l を p と異なる素数とするとき,

$$^{\exists 1}a, {}^{\exists 1}b \in \mathbb{Z} \ \ \text{s.t.} \ \ ([1]_2)^l - [l]_2 = a + b[1]_2, \ l \mid a, \ l \mid b$$

が成り立つ.

命題 27. $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ に対し,

$$f([1]_2) = 0 \Longrightarrow \varphi(x) \mid f(x)$$

が成り立つ.

ゼミでの学習の始まりが円周の n 等分という幾何的な話題であったことから, 平方剰余と正多角形の作図の関連性について調べることに加え, 3 乗剰余や 4 乗剰余について研究し, その相互法則について調べることを今後の研究課題とする.