令和元年度卒業研究概要

2 次ガウス周期の基本定理とガウス周期の考察

初等教育教員養成課程　数学選修　浅野 遼太郎

本論文のテーマはガウス周期である. ガウス周期は次のように定義される.

定義 11. 任意の整数 a と $p-1$ の約数 d に対して, 複素数 $[a]_d$ を,

$$[a]_d = \sum_{\beta \in H_d} \zeta^{a\beta}$$

と定義する. この形の数を d **次のガウス周期**という.

本論文では, 次の定理を主定理とし, 証明を与えることを目的とする.

定理 1 (2 次ガウス周期の基本定理). p を奇素数, g を p の原始根とする. このとき次が成り立つ.

(1) $p \equiv 1 \pmod 4$ のとき,

$$[1]_2 \cdot [g]_2 = -\frac{p-1}{4}$$

が成り立ち, $[1]_2, [g]_2$ は,

$$x^2 + x - \frac{p-1}{4} = 0$$

の 2 解になる.

(2) $p \equiv 3 \pmod 4$ のとき,

$$[1]_2 \cdot [g]_2 = \frac{p+1}{4}$$

が成り立ち, $[1]_2, [g]_2$ は,

$$x^2 + x + \frac{p+1}{4} = 0$$

の 2 解になる.

この主定理の証明には, ガウス周期 $[1]_2$ と $[g]_2$ の和 $[1]_2 + [g]_2$ と積 $[1]_2 \cdot [g]_2$ の値がとても重要である. これらの値, 特に積の値を求める際に膨大な計算をするのではなく, $\mathbb{F}_p$ 上の方程式の解の個数を考えることで理論的に導き出した.

積 $[1]_2 \cdot [g]_2$ の値を考えた主定理の証明を経て, 私は同じガウス周期の積の値はどのようになるのかという疑問を持ち, $[1]_2$ の冪について研究を行った. その結果, 特に $p = 5,\ n = 2^m\ (m \geq 1)$ のとき,

$$[1]_2^{2^m} = b_m [g]_2 + c_m$$

をみたす数列 $\{b_m\}, \{c_m\}$ を具体的に決定することができた.