平成３０年度卒業研究概要

奇数周期となる連分数展開の考察

中等教育教員養成課程　数学専攻　刈谷 瑛美

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を, 整数 a_0 と自然数列 a_n を用いて次のように表す:

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}.$$

この表記法を連分数展開といい, $\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ と書く. 連分数において, ある一定の自然数が周期的に繰り返し現れる連分数展開を循環連分数という. $d \in \mathbb{N}$ に対し, $\sqrt{d}$ の連分数展開は $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_n}]$ と表される. このときの n を周期といい, $l(d)$ と表す. 本論文では, $l(d) = 1,\ 2,\ 3$ である d を決定し, また, $l(d) = 5,\ 7$ となる d を与えている.

定理 4. (1) $d \in \mathbb{N}$ に対し,

$$d = \left\{(n^2+2n+2)a - \frac{n+3}{2}\right\}^2 + 2(n^2+n+1)a - (n+1)$$

とすると, $l(d) = 5$ となり, $\sqrt{d}$ の連分数展開は次のように表せる:

$$\sqrt{d} = \left[(n^2+2n+2)a - \frac{n+3}{2}, \overline{1, n, n, 1, 2\left\{(n^2+2n+2)a - \frac{n+3}{2}\right\}}\right].$$

ただし, a は任意の自然数であり, n は $n \equiv 1 \pmod 2$ をみたす自然数である.

(2) $d \in \mathbb{N}$ に対し,

$$d = \{(2n^2+2n+1)a - 2n^2\}^2 + 2(2n+1)a - 2(2n-1)$$

とすると, $l(d) = 5$ となり, $\sqrt{d}$ の連分数展開は次のように表せる:

$$\sqrt{d} = [(2n^2+2n+1)a - 2n^2, \overline{n, 1, 1, n, 2\{(2n^2+2n+1)a - 2n^2\}}].$$

ただし, $a,\ n$ は任意の自然数である.

定理 5. $d \in \mathbb{N}$ に対し,

$$d = (13a-6)^2 + 16a - 7$$

とすると, $l(d) = 7$ となり, $\sqrt{d}$ の連分数展開は次のように表せる:

$$\sqrt{d} = [13a-6, \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2(13a-6)}].$$

ただし, a は任意の自然数である.