平成３０年度卒業研究概要

偶数周期をもつ連分数の連分数展開について

中等教育教員養成課程　数学専攻　近藤 麻友

与えられた実数を整数部分と小数部分に分け, 小数部分を分子が1となるように変形しその分母をさらに整数部分と小数部分に分けるという作業を繰り返していく. これを連分数展開という. 本論文では, 平方数でない自然数の平方根の連分数を取り扱う. 例えば, $\sqrt{2}$ を連分数展開すると次のようになる:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1+\sqrt{2}-1 = 1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}} \\ &= 1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}} = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\ddots 2+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}}}} = [1,2,2,\ldots] = [1,\overline{2}].\end{aligned}$$

ある一定の自然数が周期的に現れる連分数を循環連分数という. 一般に, 平方でない自然数 d に対し, $\sqrt{d}$ は $\sqrt{d}=[a_0,\overline{a_1,\ldots,a_m}]$ と循環連分数に連分数展開される. このとき, m を周期といい, $l(d)$ と表す. 本論文では, 周期が偶数のものを考察する. その中でも, 循環する部分の真ん中の数に着目し次のような連分数展開を考える.

定義 6. 自然数 d に対し, $\sqrt{d}=[a_0,\overline{a_1,\ldots,a_{l(d)}}], 2 \mid l(d)$ と連分数展開されたとする. このとき $a_{\frac{l(d)}{2}}=a_0$ となる d を Type A の自然数, $a_{\frac{l(d)}{2}}=a_0-1$ となる d を Type B の自然数という.

本論文では, 周期が6となる Type A, Type B の自然数 d とその平方根の連分数展開の形を特徴付けている.

定理 8. $l(d)=6$ となる Type A の自然数 d とその平方根の連分数展開は次の形に限る:

$$\begin{aligned} d &= \{(2t^2+1)a+t\}^2+4ta+2, \\ \sqrt{d} &= [(2t^2+1)a+t,\overline{t,2t,(2t^2+1)a+t,2t,t,2\{(2t^2+1)a+t\}}]. \end{aligned}$$

ただし, a,t は任意の自然数である.

定理 9. $l(d)=6$ となる Type B の自然数 d とその平方根の連分数展開は次の形に限る:

$$d=9a^2+8a+2, \sqrt{d}=[3a+1,\overline{2,1,3a,1,2,2(3a+1)}].$$

ただし, a は任意の自然数である.