平成２９年度卒業研究概要

素数に関する 2 平方和定理と 3 平方和についての考察

中等教育教員養成課程　数学専攻　近藤 成美

本論文の前半では, 2 平方和に関する次の定理を示している.

定理 1 (素数に関する 2 平方和定理). p を素数とする. このとき,

$$p \text{ が } 2 \text{ 平方和で表せる} \ \Leftrightarrow\ p \equiv 1 \pmod 4 \text{ または } p = 2.$$

定理 2 (2 平方和定理). m を正の整数とする.
(1) m を, $m = p_1 p_2 \cdots p_r M^2$ と相異なる素数 $p_1, p_2, \ldots, p_r$ と平方数 M^2 の積に分解する. このとき, 各 p_i が 2 であるか, または 4 を法として 1 と合同となることは, m が 2 平方和で表せるための必要十分条件である.
(2) 以下の 2 条件のうち 1 つがみたされることは, m が 2 平方和 $m = a^2 + b^2$ かつ $\gcd(a, b) = 1$ に表せるための必要十分条件である:

(i) m は奇数かつ m の各素因数はすべて 4 を法として 1 に合同である.

(ii) m は偶数で $m/2$ が奇数であり, $m/2$ の各素因数はすべて 4 を法として 1 に合同である.

本論文の後半では, ここから話を拡げて 3 平方和について考察している. その結果, 次を得ることができた.

定理 3. m を正の整数とする. このとき

$$m \text{ が } 3 \text{ 平方和で表せる} \ \Rightarrow\ m \not\equiv 7 \pmod 8.$$

定理 4. $m \in \mathbb{Z}$ $(m > 0)$ に対して, $n, k \in \mathbb{Z}$ $(k \geq 0,\ n > 0)$ を用いて $m = 4^n(8k+7)$ と表せるとき, m は 3 平方和で表せない.

数値例より定理 4 の逆も成り立つと予想されたが, 証明することは叶わなかった. 本論文では次を証明している.

定理 5. $m \in \mathbb{Z}$ $(m > 0)$ に対して, $n, k \in \mathbb{Z}$ $(n, k \geq 0)$ と $s \in \{1, 2, 3, 5, 6\}$ を用いて $m = 4^n(8k+s)$ と表せたとする.
(1) $s \in \{1, 2, 5\}$ のとき, $8k+1$ が 2 平方和で表せるならば, m は 3 平方和で表せる.
(2) $s \in \{2, 3, 6\}$ のとき, $8k+2$ が 2 平方和で表せるならば, m は 3 平方和で表せる.

本論文の最後に, 100 以下の正の整数について 3 平方和で表したものを表にして与えた.