平成２９年度卒業研究概要

偶数の完全数の決定と奇数の完全数の非存在について

初等教育教員養成課程　数学選修　松浦 俊貴

本論文では, 整数論の題材の中から完全数を取り上げ, 特に奇数の完全数について考察することを目的としている. ここで, 完全数とは次のように定義される自然数である.

定義 1 (完全数)**.** 自然数 n について, n の真の約数の和が n と等しいとき, n のことを完全数という.

現在見つかっている完全数はすべて偶数であり, また, 偶数の完全数の場合はすべての偶数の完全数を決定できる次の定理が存在する.

定理 1. 偶数 n に対し, n がある素数 p を用いて

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

と表され, $2^p - 1$ が素数であることは, n が完全数であるための必要十分条件である.

この定理は, ユークリッドの完全数定理, オイラーの完全数定理と呼ばれる 2 つの定理からなる.

奇数の完全数については, 10^{1500} 以下には存在しないことは分かっているが, いまだに, 存在しないという証明は知られていない. そこで, 本論文ではある条件を満たすような奇数が完全数とはならないことを示す次の 3 つの定理を証明した.

定理 4. 奇素数 p, q について, $p^i q^j$ の形をした完全数は存在しない.

定理 5. 奇素数 p, q, r について, $p^i q^j r^k$ の形をした完全数は存在しない.

定理 6. 奇素数 $p_1, p_2, \ldots, p_r\,(p_1 < p_2 < \cdots < p_r)$ について, $p_1 > 2r$ ならば $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ は完全数にならない.

定理 6 で $r = 1$ とおくことにより, 奇素数のべき乗の形をした完全数の非存在性が導かれる.

今後も, 奇数の完全数の非存在について考察していきたいと考える. 具体的な課題として次の二点を挙げる. 一点目は, 異なる 4 つの奇素数のべき乗の積で表される奇数が完全数にならないことを完全に証明することである. 二点目は, 定理 6 の条件「$p_1 > 2r$」に代わるよりよい条件を見つけることである.