平成２８年度卒業研究概要

一様ステップ法が作る充満, マジック, 対角マジック方陣

中等教育教員養成課程　数学専攻　竹内 彗

方陣に数を配列する方法の 1 つが, 一様ステップ法である.

定義 2. $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ とする. $n \times n$ 方陣に対する一様ステップ法は, n^2 個の整数 $j = 0, 1, \ldots, n^2 - 1$ を, 次の式で与えられる座標 (x_j, y_j) のセルに置く:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_j \equiv a + cj + e\left[\frac{j}{n}\right] \pmod{n}, \\ y_j \equiv b + dj + f\left[\frac{j}{n}\right] \pmod{n}. \end{cases}$$

ここで, [ ] はガウス記号, すなわち, $[j/n]$ は j/n を超えない最大の整数を表す.

研究の目的は, この一様ステップ法 (1) によって作られる方陣が, 充満方陣, マジック方陣, 対角マジック方陣と呼ばれる方陣になる条件を考察することである. 本論文では, 十分条件を与え証明する. また, $p \times p$ 方陣の場合に与えた十分条件が, 必要条件となっていることを示す. ここでは, 充満方陣と呼ばれる方陣を例に挙げる.

定義 3. $n \times n$ 方陣の各々のセルに, n^2 個の数がちょうど 1 つずつ入っているとき, この方陣は**充満である**といい, このような方陣を**充満方陣**という.

定理 1. 一様ステップ法 (1) によって作られる方陣について, $(cf - de, n) = 1$ ならばその方陣は $n \times n$ 充満方陣である.

この定理の逆について, p を素数とし, 以下の命題として, $n = p$ の場合のみ示す.

命題 2. p を素数とする. 一様ステップ法 (1) について, $(c, d, e, f) \not\equiv (0, 0, 0, 0) \pmod{p}$ とする. このとき, $(cf - de, p) = p$ ならば, 一様ステップ法 (1) によって作られる方陣は充満でない. また, その方陣のセルは空であるか, p 個の数が入る.

この命題は, (c, p) と (d, p) が 1 か p であることに注意して, 4 つの場合, i) $(c, p) = (d, p) = 1$ のとき; ii) $(c, p) = (d, p) = p$ のとき; iii) $(c, p) = 1, (d, p) = p$ のとき; iv) $(c, p) = p, (d, p) = 1$ のときに場合分けをして, $\bmod p$ の完全剰余系を利用して証明する.

マジック方陣, 対角マジック方陣についても, 命題 2 と同様に, $n = p$ の場合に証明している. 一般の自然数 n での完全な証明を, 今後の課題とする.