平成２８年度卒業研究概要

原始根の存在定理について

初等教育教員養成課程　数学選修　本道 和敬

本論文では, 法を素数としたときの原始根の存在定理を証明すること, また法を一般の自然数としたときの原始根の個数についての定理を証明することを目標とする. ここで, 原始根とは以下で定義されるものである.

定義 8. 自然数 n に対し, $(a, n) = 1$ で, $\mathrm{ord}_n(a) = \phi(n)$ のとき, a を n の原始根という. 但し, $\mathrm{ord}_n(a)$ は a の mod n の位数を表し, ϕ はオイラーの ϕ 関数, すなわち, $\phi(n)$ は n 以下の自然数のうち n と互いに素なものの個数を表す.

次に, 本論文の目標である 2 つの定理を述べる.

定理 1. p を素数とし, $d \mid p-1$ とする. mod p の位数が d であるような mod p で異なる整数がちょうど $\phi(d)$ 個存在する. 特に, p の原始根はちょうど $\phi(p-1)$ 個ある.

定理 2. n が原始根を持つならば, n はちょうど $\phi(\phi(n))$ 個の原始根を持つ.

本論文の構成を以下で述べる.

1 節では, 本論文で必要とする整数論の基本事項を準備する. まず, 合同式について定義と性質を述べ, 完全剰余系と既約剰余系とオイラーの ϕ 関数の定義を述べる. 次に, 多項式の合同についていくつかの性質を述べ, それらを用いて合同式の解の個数について性質を述べる.

2 節では, 定理 2 の証明の鍵となる命題の証明に必要な, ある集合が既約剰余系になるための十分条件を与えた命題を証明する.

3 節では, 1 節で述べた性質を用いて, 上で述べた定理 1 と定理 2 の証明を目的とする. まず位数の定義を述べる. 次に, 原始根を定義し, 位数に関する命題を述べた後, 定理 1 を証明する. そして, 既約剰余系に関する命題を述べてから定理 2 を証明する. 最後に, $1 \leq n \leq 30$ に対し, n の原始根をすべて挙げたものを表にし, $\phi(\phi(n))$ の値と照らし合わせる.

今後の課題として, まずどのような自然数が原始根を持つのかを考察していく. また, 原始根を持つ場合に, どのような数が原始根になるのか, さらにその原始根たちがどのような規則性を持つのかを考察していきたい.