平成２７度卒業研究概要

ある合同式の解の無数の存在性

初等教育教員養成課程　数学選修　竹内 桃子

本論文では, 次の定理 2 を主定理としている.

定理 2. 奇素数 p に対して, $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ となる $n \in \mathbb{N}$ は無数に存在する.

第 1 節では, 主定理を証明するための準備としてフェルマーの小定理の証明を与え, 第 2 節で, 主定理の証明を与えている. また, 第 3 節では, “n のすべての解を求めること” に視点を変え, $p = 3,\ 5,\ 7,\ 11$ の場合において, その解を与えている.

定理 3. $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$ となる $n \in \mathbb{N}$ は次で与えられる:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 1,\ 2 \pmod{6}\}.$$

定理 4. $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ となる $n \in \mathbb{N}$ は次で与えられる:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 3,\ 4,\ 6,\ 17 \pmod{20}\}.$$

定理 5. $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ となる $n \in \mathbb{N}$ は次で与えられる:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 5,\ 6,\ 10,\ 26,\ 27,\ 31 \pmod{42}\}.$$

定理 6. $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{11}$ となる $n \in \mathbb{N}$ は次で与えられる:

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 6,\ 9,\ 10,\ 18,\ 24,\ 45,\ 47,\ 52,\ 71,\ 103 \pmod{110}\}.$$

さらに, 第 4 節では, 相異なる素数 $p,\ q$ に対して, 主定理の p を pq とおきかえ, n の無数性について考えている. 実際に $(p,\ q) = (3,\ 5),\ (3,\ 7),\ (3,\ 11),\ (3,\ 13),\ (5,\ 7)$ の場合の解を与え, 次の予想を立てたが, 常に n が無数に存在するかどうかは研究中であり, 今後の課題としている.

予想. $p = 3,\ q = 6a - 1$ の場合, n が

$$n = 3q(q-1)k + 2q(q-1) + (q-1)$$

または

$$n = 3q(q-1)k + 2q(q-1) + (q-2)$$

の形であれば, $n2^n + 1 \equiv 0 \pmod{pq}$ を満たす.