平成２７年度卒業研究概要

ピタゴラス数とアイゼンシュタイン数についての考察

中等教育教員養成課程　数学専攻　野々村 直也

本論文では, ピタゴラス数とアイゼンシュタイン数の性質について考察する.

ピタゴラス数とは, 次で定義される数である.

定義 2. $a, b, c \in \mathbb{N}$ が, $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすとき, 三つ組 (a, b, c) を**ピタゴラス数**という. また, $\gcd(a, b, c) = 1$ を満たすピタゴラス数を**原始的なピタゴラス数**という.

すべてのピタゴラス数は, 次のように一般に表される.

定理 1. $a, b, c \in \mathbb{N}$ に対して, 次の二つは同値である.

(i) (a, b, c) は原始的なピタゴラス数で, a は奇数, b は偶数である.

(ii) 次を満たす $m, n \in \mathbb{N}\,(m > n)$ が存在する:

$$\begin{cases} a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,\ c = m^2 + n^2, \\ m \not\equiv n \pmod 2, \\ \gcd(m, n) = 1. \end{cases}$$

特に原始的なピタゴラス数は無数に存在する.

ピタゴラス数の生成に関する上記定理 1 を示すことと, この定理を用いていくつかの性質を導くことを, 本論文の目的の一つとしている.

次に, アイゼンシュタイン数の定義を述べる.

定義 3. $a, b, c \in \mathbb{N}$ が, $a^2 + ab + b^2 = c^2$ を満たすとき, 三つ組 (a, b, c) を**アイゼンシュタイン数**という. また, $\gcd(a, b, c) = 1$ を満たすアイゼンシュタイン数を**原始的なアイゼンシュタイン数**という.

アイゼンシュタイン数はピタゴラス数と同じように, 次のような一般的な形で表される.

定理 4. $a, b, c \in \mathbb{N}$ に対して, 次の二つは同値である.

(i) (a, b, c) が原始的なアイゼンシュタイン数で, $2c - (a - b)$ は平方数である.

(ii) 次を満たす $m, n \in \mathbb{N}\,(m > n)$ が存在する:

$$\begin{cases} a = m^2 - n^2,\ b = n(2m + n),\ c = m^2 + mn + n^2, \\ m \not\equiv n \pmod 3, \\ \gcd(m, n) = 1. \end{cases}$$

特に原始的なアイゼンシュタイン数は無数に存在する.

本論文では, 上記定理 4 を示すことをもう一つの目的としている.