平成２６年度卒業研究概要

ガウスの定理の整数環での考察

初等教育教員養成課程　数学選修　澤田 成美

ガウスが複素数について示した命題に対して, 合同式に対しても類似の結果が成り立つだろうと考えたスタークは次を予想した.

予想 1. p を素数, a を整数とし, $(a,p)=1$ とする. $\mathrm{ord}_p(a)=k$ とおくとき,

$$\left(\sum_{j=0}^{k-1} a^{j^2}\right)^2 \equiv \begin{cases} k \pmod{p} & (k \equiv 1 \pmod{4} \text{ のとき}), \\ 0 \pmod{p} & (k \equiv 2 \pmod{4} \text{ のとき}), \\ -k \pmod{p} & (k \equiv 3 \pmod{4} \text{ のとき}), \\ 2ka^{\frac{k}{4}} \pmod{p} & (k \equiv 0 \pmod{4} \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ.

本論文は, 予想 1 をできる限り証明することを目標としている. そして, 次の場合を示した.

定理 5. p を素数, a を整数とし, $(a,p)=1$ とする. $\mathrm{ord}_p(a)=k$ とおくとき, $k \equiv 2 \pmod{4}$ ならば,

$$\left(\sum_{j=0}^{k-1} a^{j^2}\right)^2 \equiv 0 \pmod{p}$$

が成り立つ.

定理 6. p を素数, a を整数とし, $(a,p)=1$ とする. また, $\mathrm{ord}_p(a)=k$ とおく. $n \geq 2$ をみたす整数 n に対し, $k=2^{2n-1}$ ならば,

$$\left(\sum_{j=0}^{k-1} a^{j^2}\right)^2 \equiv 2ka^{\frac{4}{k}} \pmod{p}$$

が成り立つ.

これらの定理は, 多項式の因数分解などを用い, べき乗の和を工夫して計算している. また a の mod p の位数が k であることを証明の鍵としている.

予想 1 について, k が偶数の場合は $k \equiv 0 \pmod{4}$ かつ 2 の奇数べきでない場合を証明することが残された課題である. k が奇数の場合は, k が奇素数という特別な場合の式変形についての予想の証明が課題である. また, k が素数でない場合については, さらなる計算を行い特徴を見出していきたい.