平成２６年度卒業研究概要

# 原始根をもつ数とその原始根について

初等教育教員養成課程　数学選修　松井 秀和

素数の規則性を見つけ出そうと, あらゆる数学者が様々な方法を試みている. 私は素数と関係している原始根を用いて, 素数の規則性の解明に近づきたいと考える. 原始根の定義は次である.

**定義 5.** $a, n \in \mathbb{Z}_+, (a, n) = 1$ に対し,

$$\mathrm{ord}_n(a) = \phi(n)$$

のとき, $a$ を $n$ の原始根という. ここで, $\mathrm{ord}_n(a)$ は $a$ の mod $n$ の位数を表し, $\phi$ はオイラー関数を表す.

本論文の目的は, 次を示すことである.

**定理 2.** $n$ が原始根をもち得るのは, $p$ を奇素数, $k$ を正の整数としたとき,

$$n = 1,\ 2,\ 4,\ p^k,\ 2p^k$$

の形の数に限る.

また, 1 から 200 までの原始根をもつ数とその原始根について考察し, 次の結果を得た.

**定理 3.** $^\forall k \in \mathbb{Z}_+$ に対し, $10k + 1 \leq a \leq 10(k + 1)$ の範囲の整数 $a$ が原始根をもつような $a$ の個数は高々6 つである.

**定理 4.** $p$ を奇素数, $n$ を正の整数とする. $g$ を $p^{n+1}$ の原始根とするとき, $g$ は $p^n$ の原始根である.

さらに本論文では, 次の 2 つの問題を提起している.

**問題 1.** $p$ を奇素数とし, $n$ を正の整数とする. $g$ を $p^n$ の原始根とするとき, $g$ は $p^{n+1}$ の原始根である?

**問題 2.** $p$ を奇素数とする. このとき, $g$ が $p^n$ の原始根であり $g + p$ が $p^{n+1}$ の原始根でないような $n \in \mathbb{Z}_+$ は存在する?