平成２６年度卒業研究概要

原始根に関する Artin 予想の考察

初等教育教員養成課程　数学選修　長尾 希望

Artin は, 「平方数でない整数を原始根にもつ素数は無限に存在する」という予想を立てた. これは原始根に関する Artin 予想と呼ばれる未解決問題である. 一方, 素数 p の原始根は必ず存在するということは知られている.

定理 1. $d \in \mathbb{Z}_+$, p を素数, $d \mid p-1$ とする. このとき, $\bmod p$ の位数が d であるような $\bmod p$ で異なる整数が $\phi(d)$ 個存在する. 特に, p の原始根は $\bmod p$ でちょうど $\phi(p-1)$ 個存在する.

本論文の 1 つ目の目標は, 定理 1 を証明することである.

2 つ目の目標は, 原始根に関する Artin 予想について考察することである. その中で, 次の予想を立てた.

予想. $a, m \in \mathbb{Z}_+$ とし, $p = 4am \pm 1$ を素数とする. このとき,

$$a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$$

である. よって, p は a を原始根にもたない.

本論文では, この予想の $a = 2, 3, 5$ の場合を証明している.

また, 平方数は原始根にならないという次の定理がある.

定理 2. ${}^\forall a \in \mathbb{Z}_+, a \geq 2$ に対して, a^2 を原始根にもつ素数は存在しない.

この定理を拡張し, 次の結果を得た.

定理 6. $n \in \mathbb{Z}_+, n \geq 2$ に対して, p は奇素数で $n \mid p-1$ ならば, ${}^\forall a \in \mathbb{Z}$ に対して a^n は p の原始根とならない.

さらに, ある 2 以上の与えられた整数を原始根にもつ素数を見つける BASIC のプログラムを作成し, そのプログラムを用いて, ある 2 以上の与えられた整数を原始根にもつ素数の割合を計算した. べき乗でない数が原始根となる素数の割合, 3 乗数が原始根となる素数の割合, 5 乗数が原始根となる素数の割合を比較し, 考察を行っている.

また, このプログラムで得られた結果によると, 上の予想の反例は見つからなかった. 予想の証明は今後の研究課題とする.