平成２６年度卒業研究概要

擬素数について

初等教育教員養成課程　数学選修　岩田 直大

擬素数は次で定義される合成数である.

定義 4. 合成数 n が

$$2^n \equiv 2 \pmod{n}$$

を満たすとき, n を**擬素数**という.

擬素数はフェルマーの小定理の逆を考えたときに現れる数の概念である. 擬素数は素数と同じように無限に多く存在することが知られているが, 素数よりも少ない頻度で現れ, 最初の 2 つは $341 = 11 \cdot 13,\ 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$ である. 偶数の擬素数も無限に多く存在するが, それらを見つけるのは大変難しく, 最初の例は 1950 年に D. H. レーマーが発見した $161038 = 2 \cdot 73 \cdot 1103$ である.

本論文は 3 つの節から構成されている. 第 1 節では基本的な準備をし, 第 2 節で擬素数と密接な関係があるオイラーの定理とフェルマーの小定理を証明する. また第 3 節では, 次に述べるような擬素数を紹介している. $F_n := 2^{2^n} + 1$ で表されるフェルマー数 F_n はすべて素数か擬素数である. また, $M_m := 2^m - 1$ で表されるメルセンヌ数 M_m に対し, m が素数ならば M_m は素数か擬素数であり, m が擬素数ならば必ず M_m は擬素数となる. フェルマー数, メルセンヌ数は素数となるものは少数しか知られておらず, このことから, それらの多くは擬素数となることがわかる. また, 素数 $p\,(p \neq 3)$ に対して, $n := (2^{2p} - 1)/3$ で定義される正の整数 n が擬素数であることも示している.

本論文の主定理は次のものである.

定理 6. $q \equiv 1 \pmod{p-1}$ かつ $q \nmid 2^p - 1$ を満たす素数 p, q に対して, 次のように定義される正の整数 n は擬素数である:

$$n := \frac{2^{pq} - 1}{2^p - 1}.$$

$p = 3, q \neq 7$ ならば定理 6 の条件を満たす. よって, このことからも擬素数が無限に存在することがわかる.

今回の研究では奇数の擬素数を見つけることができたので, 今後は偶数の擬素数を見つけることを課題とする.