平成２６年度卒業研究概要

既約剰余系の加法による再構成

初等教育教員養成課程　数学選修　清水 和馬

本論文では, 次の問題に対する完全な解答を与えることが目的である.

問題. mod n の既約剰余系のすべての元に正の整数 a を加えたとき, 再び mod n の既約剰余系となるのはどのような n か, また, 既約剰余系とならないのはどのような n か.

mod n の既約剰余系

$$\mathscr{S}_n := \{t \,|\, (t,n) = 1, 1 \leq t < n\}$$

を考える. まず, $a = 2$ のときの定理を述べる.

定理 1. $n = 2^k\,(k \in \mathbb{Z}, k \geq 0)$ のとき, $\mathscr{S}_n$ のすべての元に 2 を加えた集合は, 再び mod n の既約剰余系となる. 逆に n が 2 のべきでないとき, $\mathscr{S}_n$ のすべての元に 2 を加えた集合は, mod n の既約剰余系にならない.

定理 1 の 2 を a にそのまま変えるだけでは, 逆が成り立たない. そこで, 計算実験を繰り返し次の定理を得た.

定理 4. n が a の素因子しか素因子にもたないとき, $\mathscr{S}_n$ のすべての元に a を加えた集合は, 再び mod n の既約剰余系となる. 逆に n が a の素因子以外の素因子を持つとき, $\mathscr{S}_n$ のすべての元に a を加えた集合は, mod n の既約剰余系にならない.

定理を証明する際, 既約剰余系となる判定には次の命題を用いている.

命題 5. $S \subset \mathbb{Z}$ が次の 3 つの条件を満たすとき, S は mod n の既約剰余系となる.

(i) $\#S = \phi(n)$.

(ii) $^\forall a \in S$ に対し, $(a, n) = 1$.

(iii) S の最大元を M, 最小元を m とするとき, $M - m < n$.

特に, $\mathscr{S}_n$ の各元に正の整数 a を加えた集合は, 命題 5 の (i), (iii) を満たすので, 既約剰余系となることは, 命題 5 の (ii) を満たすことのみを確かめればよいことに注意する.

また, 本論文の最後に, 既約剰余系から考えられるゴールドバッハ予想との関連を述べている.