平成２６年度卒業研究概要

σ 関数, 完全数, 親和数の性質

中等教育教員養成課程　数学専攻　山田 利香子

本論文では, σ 関数の性質について考察し, それらをもとに, 完全数, 親和数の考察を行う.

σ 関数とは, 以下で定義される関数である.

定義 3. $i \in \mathbb{Z},\ i \geq 0$ とする. 正の整数 n に対して,

$$\sigma_i(n) = \sum_{d|n} d^i$$

と定義された関数を σ **関数**という. 特に, $i = 0$ のとき, $\sigma_0(n)$ は n の正の約数の個数, $i = 1$ のとき, $\sigma_1(n)$ は n の正の約数の和である.

σ 関数について, いくつか性質を述べているが, その命題の中の 1 つを述べる.

命題 11. $i \in \mathbb{Z},\ i \geq 1$ に対して, $\sigma_i(n)$ が奇数のとき, かつそのときに限り, $n = a^2$ または $n = 2a^2\ (a \in \mathbb{Z},\ a > 0)$ と表せる.

次に, 完全数, 親和数の定義を述べる.

定義 4. $\sigma_1(n) - n = n$ となる整数 n を**完全数**という.

定義 5. $\sigma_1(m) - m = n,\ \sigma_1(n) - n = m$ となるような 2 つの整数 $m,\ n$ を**親和数**という.

本論文では, 奇数の完全数は存在するか, 偶数と奇数の組の親和数は存在するかという未解決問題について考察している. 命題 11 より, 偶数 n と奇数 m が親和数となるとき, n, m は以下のどちらかの形をしていることがわかる.

(Type I) $n = 2a^2,\ m = (2b+1)^2\ (a,\ b \in \mathbb{Z},\ a,\ b \geq 1)$,

(Type II) $n = (2a)^2,\ m = (2b+1)^2\ (a,\ b \in \mathbb{Z},\ a,\ b \geq 1)$.

このことを利用し, Type II のような偶数と奇数の親和数の組が存在するための必要条件を与えた. また, 完全数についても, 奇数の完全数が存在するための必要条件を与えた.

今後の課題は, 今回得られた結果をさらに考察し, 未解決問題の解決にできる限り近づけることである. また, Type I のような偶数と奇数の親和数の組が存在するための必要条件についても考察したい.