平成２５年度卒業研究概要

平方剰余の相互法則について

初等教育教員養成課程　数学選修　徳地 みゆき

ゼミで学んだいろいろな整数の性質の中で, 平方数についての一番大きな定理である平方剰余の相互法則に挑んだ. 本論文では, 次に述べる平方剰余の相互法則を証明することが目標である.

定理 3 (**平方剰余の相互法則**). 異なる 2 つの奇素数 p, q に対し, $p' = (p-1)/2, q' = (q-1)/2$ とおくと,

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{p'q'}$$

が成り立つ.

この定理の証明の鍵となる 2 つの命題を述べる.

命題 7. p を奇素数とし, $m \in \mathbb{Z}$, $p \nmid m$ とする.

$$m, 2m, 3m, \ldots, \frac{1}{2}(p-1)m$$

の中で, p を法とする最小の正の剰余が $p/2$ より大きい数の個数を μ としたとき,

$$\left(\frac{m}{p}\right) = (-1)^{\mu}.$$

命題 8. 異なる 2 つの奇素数 p, q に対し,

$$S(q,p) = \sum_{s=1}^{p'} \left[\frac{sq}{p}\right]$$

と定義する. $p' = (p-1)/2$, $q' = (q-1)/2$ とおくとき,

$$S(q,p) + S(p,q) = p'q'.$$

また, 平方剰余の相互法則を用いて, 以下の定理に証明を与えた.

定理 4. a を奇素数, $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $2na+1$ が奇素数となるとき,

$$\left(\frac{(-1)^{(a-1)/2}a}{2na+1}\right) = 1.$$

本論文で述べる平方剰余の相互法則の証明方法は, ガウスの第 3 法則と呼ばれるものである. ガウスは平方剰余の相互法則について, 生涯で 7 通りの証明に成功しており, また現在 200 通り近くの証明があるといわれている. 他の証明方法について調べることを今後の研究課題とする.