平成２６年度卒業研究概要

整数論における数の無理数性の証明について

初等教育教員養成課程　数学選修　鈴木 正洋

本論文は,「実数 x は有理数か？それとも無理数か？」という問題に取り組む. 当然, 解析学で取り組むような「無理数の理論」は, 整数論で扱う範囲の外にあり, 一見整数論では扱えないように思われる. だが, 整数論の一部とみなすことのできる多くの問題がある. たとえば,「$\sqrt{2}$ は無理数である」 という定理は,「$a/b = \sqrt{2}$ となるような整数 a, b は存在しない」と書き換えられ, さらにこれは「$a^2 = 2b^2$ は整数解を持たない」という形に言い換えることができる. これは正当に整数論の定理であり, $\sqrt{2}$ の意味や, 根号自体の解釈を必要としていない. このことから, 整数論の範囲を超えることなく「$\sqrt{2}$ は無理数だろうか？」と問うことができる.

本論文では, 代数的無理数およびネイピア数 e, 円周率 π に関する無理数性の証明を行う. 代数的無理数に関しては, たとえば整数係数を持つ 2 次以上の規約多項式の根が実数であるときに無理数となることを示す. ネイピア数 e, 円周率 π に関しては, 以下に挙げる定理を主に証明する.

定理 4. e は無理数である.

定理 5. ${}^\forall y \in \mathbb{Q}$ $(y \neq 0)$ に対し, e^y は無理数.

定理 6. π および π^2 は無理数.

定理 7. ${}^\forall x \in \mathbb{Q}$ $(x \neq 0)$ に対し, π^x は無理数.

定理 4 は e の無限級数表示を利用し, e が有理数であると仮定して矛盾を導くという方法で比較的容易に示される. 定理 5 も, e^y が有理数であると仮定して矛盾を導く方法で示すが, 容易ではない. 定理 6 は π^2 の無理数性を同じく背理法で示し, π の無理数性を導く. 定理 7 に関しては, π が超越数であることを認めて証明する.

また, 高校数学における $\sqrt{2}$ の背理法を使った無理数性の証明と, 出版社および教科書別の掲載の有無についてまとめ, さらには, 一般の平方根 $\sqrt{N}$ の無理数性の証明への発展的な学習についての考察を行う.

π の無理数性の直接の証明および π の超越数の証明にはまだ取り組んでいないので, これらの証明法について学んでいきたいと考える.