平成２５年度卒業研究概要

ファレイ数列の性質について

中等教育教員養成課程　数学専攻　松井 裕樹

本論文ではファレイ数列の様々な性質について考察を行う．ファレイ数列は, 以下で定義される数列である．

定義 8. 正の整数 n に対し, $0 \leq h \leq k \leq n$, $(h,k)=1$ を満たす整数 h, k で作られる分数 h/k を昇順に並べた数列を, 位数 n の**ファレイ数列**といい, F_n と表す．

位数が 1 から 8 までのファレイ数列は次のようになる:

$$
\begin{aligned}
F_1 &: \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \\
F_2 &: \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \\
F_3 &: \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \\
F_4 &: \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \\
F_5 &: \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \\
F_6 &: \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \\
F_7 &: \frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1} \\
F_8 &: \frac{0}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{1}{1}
\end{aligned}
$$

本論文ではいくつかの性質を見つけ出しそれを示している．その中でも次が主結果である．

定理 6. $h/k, h'/k'$ が F_n で隣り合うとする．このとき次が成り立つ．
(1) $s \geq k+k'$ に対し, $(h+h')/(k+k')$ は F_s の項になる．また, $k+k' \leq s < k+2k'$ のとき $(h+h')/(k+k')$ と h'/k' は F_s で隣り合い, $s \geq k+2k'$ のときは隣り合わない．
(2) $s \geq k+k'$ に対し, $(h+h')/(k+k')$ は F_s の項になる．また, $k+k' \leq s < 2k+k'$ のとき h/k と $(h+h')/(k+k')$ は F_s で隣り合い, $s \geq 2k+k'$ のときは隣り合わない．

定理 7. F_n において, 分子が 1 となる項が第 2 項の $1/n$ から第 $[n/2]+2$ 項の $1/[(n+1)/2]$ まで $[n/2]+1$ 個連続する．

今後は, ファレイ数列の項を一般式で表すことができないかという問題に取り組んでいく．