令和7年度卒業研究概要

ウィルソンの定理とウィルソン商

学校教員養成課程　義務教育専攻　算数･数学専修　宮田 朋実

本論文の前半の目標は, 次のウィルソンの定理を証明することである.

定理 1 (ウィルソンの定理). すべての素数 p に対し,

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \tag{1}$$

となる. 逆に, $p \in \mathbb{Z}$ $(p > 1)$ が合同式 (1) を満たせば, p は素数である.

証明の鍵は次の命題を示すことである.

命題 9. p を奇素数とする. $a \in \mathbb{Z}$ $(p \nmid a)$ に対し,

$$(p-1)! \equiv -\left(\frac{a}{p}\right) a^{(p-1)/2} \pmod{p}$$

となる.

また, ウィルソンの定理より, 次が定義される.

定義 10. 素数 p に対し,

$$W(p) := \frac{(p-1)!+1}{p}$$

をウィルソン商という. また, 合同式

$$W(p) \equiv 0 \pmod{p} \tag{2}$$

を満たす素数 p を, ウィルソン素数という.

そこで, ${}^{\forall}a \in \mathbb{Z}$ $(0 \leq a < p)$ に対し, 合同式 (2) を一般化した合同式

$$W(p) \equiv a \pmod{p} \tag{3}$$

を満たす素数 p を考え, この p がどのような分布を示すのかを調べることを本論文の後半の目標とした. 本論文では, 素数 p (< 200000) に対し, 合同式 (3) を満たす $a \in \mathbb{Z}$ $(0 \leq a < p)$ を求め, 点 (p, a) としてプロットしたグラフを作成し, 次の予想を立てた.

予想 1. ${}^{\forall}a \in \mathbb{Z}$ $(a \geq 0)$ に対し,

$${}^{\exists}p\ (> a) : 素数\ \ \text{s.t.}\ \ W(p) \equiv a \pmod{p}$$

となる.

さらに, 特定の a に対して素数 p の範囲を 1000000 未満まで広げ, 予想の検証を行っている.