

フェルマー・オイラーの定理

学校教員養成課程 義務教育専攻 算数・数学専修 石和 千佳

本論文の主定理は、次に述べるフェルマー・オイラーの定理である。

**定理 1 (フェルマー・オイラーの定理).**  $a \in \mathbb{Z}$  に対し,  $(a, m) = 1$  ならば,

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

である。

本論文では、フェルマー・オイラーの定理に対して、フェルマーの定理を用いない証明法と用いる証明法を与えている。ここで、フェルマーの定理とは次の定理である。

**命題 3 (フェルマーの定理).**  $p \in \mathbb{P}, a \in \mathbb{Z}$  に対し,  $p \nmid a$  ならば,

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

である。

また、本論文ではフェルマーの定理の延長であるヴィーフエリッヒ素数について考察している。ヴィーフエリッヒ素数は次で定義される。

**定義 3.**  $p \in \mathbb{P}$  に対し,

$$2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$$

が成り立つとき,  $p$  をヴィーフエリッヒ素数という。

ヴィーフエリッヒ素数は,  $p < 3 \times 10^7$  の範囲で  $p = 1093, 3511$  のみしか存在しない。また現在のところ, それ以外には知られていない。本論文では, 1093 がヴィーフエリッヒ素数であることを, 実際に計算し確かめている。

ヴィーフエリッヒ素数は  $(2^{p-1} - 1)/p$  の法  $p$  に関する剰余が 0 になると言い換えることができる。  $(2^{p-1} - 1)/p$  の法  $p$  に関する剰余について, 次が成り立つ。

**命題 9.**  $p$  を奇素数とすると,

$$\frac{2^{p-1} - 1}{p} \equiv 1^{-1} + 3^{-1} + 5^{-1} + \cdots + (p-2)^{-1} \pmod{p}$$

である。

ここで,  $xx' \equiv 1 \pmod{p}, 0 < x' < p$  を満たす  $x'$  を  $x^{-1}$  と表している。本論文では,  $\lambda_p := 1 + 3^{-1} + 5^{-1} + \cdots + (p-2)^{-1}$  とおき,  $\lambda_p$  の値と  $\lambda_p$  の法  $p$  での剰余を具体的に計算し考察している。