令和7年度卒業研究概要

オイラー関数の逆について

学校教員養成課程　義務教育専攻　算数・数学選修　森田 凌矢

本論文では, 次で定義されるオイラー関数について扱う.

定義 2. $m \in \mathbb{Z}$ $(m > 0)$ に対し, $\phi(m)$ を, $0 < n \leq m, (n, m) = 1$ を満たす $n \in \mathbb{Z}$ の個数とする.

本論文の前半ではオイラー関数の基本的な性質である乗法性を証明し, オイラー関数の明示公式を与える.

本論文の後半では, 正の整数 a が与えられたとき, $\phi(x) = a$ となるような整数 x の取り得る範囲について与え, 上限, 下限において等号成立する条件を与える. その上限を与える公式において, 等号成立条件にフェルマー素数が現れる. フェルマー素数とは, 次で定義される素数である.

定義 3. $n \in \mathbb{Z}$ $(n \geq 0)$ に対し,

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

で表される素数をフェルマー素数という. また, $k \in \mathbb{Z}$ $(k \geq 1)$ に対し, k 番目のフェルマー素数を F_{l_k} と表す.

本論文の主定理は次の定理である.

定理 1. $a \in \mathbb{Z}$ $(a > 0)$ に対し, $S := \{q \in \mathbb{P} \mid q - 1 \mid a\}$ とする. このとき, 次が成り立つ.
(1) $\phi(x) = a$ を満たす整数 x の取り得る範囲は

$$a + 1 \leq x \leq \frac{a}{\prod_{q \in S} \left(1 - \frac{1}{q}\right)}$$

となる.
(2) x が $\phi(x) = a$ を満たすとき,

$$x = a + 1 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{P}.$$

(3) $a = 2^b$ $(b \geq 0)$ とする. x が $\phi(x) = a$ を満たすとき,

$$x = \frac{a}{\prod_{q \in S} \left(1 - \frac{1}{q}\right)} \Longleftrightarrow x = \begin{cases} 2 & (b = 0) \\ 2^{b+1-\sum_{i=1}^{k} 2^{l_i}} \prod_{i=1}^{k} F_{l_i} & (b \geq 1). \end{cases}$$

ただし, k は $a + 1$ 以下のフェルマー素数の個数である.

さらに, 本論文では $\phi(x) = a$ を満たす整数 x を決定する定理を証明している.