令和 7 年度卒業研究概要

ユークリッド原論におけるユークリッドの補題と自然数の m 乗根の無理数性

学校教員養成課程　義務教育専攻　算数･数学専修　荒川 祐実

本論文では, 様々な実数の無理数性について, ユークリッドの補題を用いる現代的な証明方法と, ユークリッドの補題を用いない古典的な証明方法とを比較することを目標とする. ここで, ユークリッドの補題を紹介する.

ユークリッドの補題. 素数 p に対し,

$$p \mid ab \;\Rightarrow\; p \mid a \;\text{ or }\; p \mid b.$$

本論文の前半では, 次の 1 つの命題および 2 つの定理に対して, ユークリッドの補題を用いた証明方法と用いない証明方法を与える.

命題 1. 整数 N が完全平方数でないならば, $\sqrt{N}$ は無理数である.

定理 1. 整数 N がある整数の m 乗でないならば, $\sqrt[m]{N}$ は無理数である.

定理 2. x_0 が整数係数で最高次の係数が 1 の多項式

$$f(x) = x^m + c_1x^{m-1} + \cdots + c_m$$

の根であるとすれば, x_0 は整数または無理数である.

本論文の後半では, ユークリッド原論の体系に即してユークリッドの補題の証明を行う. ユークリッドの補題はユークリッド原論第 7 巻の命題 VII.30 に記され, その証明では同じく第 7 巻に記載された次の 4 つの命題が用いられている.

命題 VII.19. $a : b = c : d$ ならば, $ad = bc$. 逆に $ad = bc$ ならば, $a : b = c : d$.

命題 VII.20. a, b が $a : b = c : d$ を満足するうちの最小の数とすれば, 自然数 $n \geq 1$ があって, $c = na, d = nb$ となる.

命題 VII.21. $(a, b) = 1$ ならば, a, b はそれらと同じ比をもつ 2 数のうち最小.

命題 VII.29. 素数はそれの倍数以外すべての数に対して素である.

本論文では, さらにこれら 4 つの命題をユークリッド原論第 5 巻および第 7 巻に記載された命題を用いて証明する.