令和７年度卒業研究概要

ファレイ数列の様々な性質について

学校教員養成課程　義務教育専攻　算数･数学専修　前田 和樹

本論文では, 次で定義されるファレイ数列を扱う.

定義 1. 自然数 n に対し, 位数 n のファレイ数列 F_n とは, 0 と 1 の間にある既約分数のうち分母が n 以下のものを小さい方から順に並べた数列である.

本論文の前半では, 次の 2 つの定理の同値性を証明し, さらに定理 1 を 2 種類の方法で証明する.

定理 1. $h/k,\ h'/k'$ が F_n の隣り合う 2 項であれば,

$$kh' - hk' = 1$$

が成り立つ.

定理 2. $h/k,\ h''/k'',\ h'/k'$ が F_n の隣り合う 3 項であれば,

$$\frac{h''}{k''} = \frac{h+h'}{k+k'}$$

が成り立つ.

本論文の後半では, ファレイ数列を用いた無理数 e と π の近似について考察する. さらには, 次に述べる性質を定理として与える. ここで, T_n をファレイ数列 F_n のすべての項全体の集合と定義し, $\phi(n)$ を, $0 < m \leq n$, $(n,m) = 1$ を満たす $m \in \mathbb{Z}$ の個数とする.

定理 3. $n \geq 2$ に対し,

$$\sharp T_n = \sharp T_{n-1} + \phi(n)$$

が成り立つ.

定理 4. $n \geq 1$ に対し,

$$\sharp T_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \phi(k)$$

が成り立つ.

定理 5. $n \geq 2$ に対し, ファレイ数列 F_n の各項の和を S_n とすると

$$S_n = \frac{1}{2}(1 + \sum_{k=1}^{n} \phi(k))$$

が成り立つ.