令和 6 年度卒業研究概要

アルキメデスの牛の問題

学校教員養成課程　義務教育専攻　算数･数学専修　伊藤 杏純

本論文の目標は, ペル方程式に関する有名なの問題 1 つである, アルキメデスの牛の問題の最小解を与えることである. 問題文より

$$W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) X + Z,$$

$$X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) Y + Z,$$

$$Y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) W + Z,$$

$$w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) (X + x),$$

$$x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) (Y + y),$$

$$y = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) (Z + z),$$

$$z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) (W + w),$$

$$W + X = p^2 \ (p \in \mathbb{N}), \tag{1}$$

$$Y + Z = \frac{q(q+1)}{2} \ (q \in \mathbb{N})$$

の 9 つの式を立てることができ, これらの式を用いることで, 最終的にペル方程式

$$T'^2 - 4729494U'^2 = 1$$

を解くことに帰着される. 本論文の前半では, このペル方程式の最小解を求める過程を述べる.

本論文の後半では, 白い牡牛と黒い牡牛が一緒に並んだとき, 牛が正方形の形に並ぶという条件を, 正方形に近い「奥行と幅がほぼ等しい長方形の形に並ぶ」という条件に変え, (1) 式を

$$W + X = pr \ \left(p, r \in \mathbb{N},\ p > r,\ 0.99 < \frac{r}{p} < 1\right)$$

に変えた場合の考察を行う. この条件に変えたとき, 問題は

$$T^2 - 4942U = 1$$

を解くことに帰着され, 牛の総数の最小値が 31539534205440 頭 と得られる.