令和 6 年度卒業研究概要

ラグランジュの定理とペル方程式の基本解の導出について

学校教員養成課程　義務教育専攻　算数・数学専修　奥田 純平

本論文では, ペル方程式の基本解の導出を主な目的として取り上げる. ここで, ペル方程式とその基本解は次のように定義されるものである.

定義 6. T, U を整数変数とする方程式

$$T^2 - DU^2 = 1 \tag{1}$$

をペル方程式と呼ぶ. また, $\epsilon' \in \mathbb{R}$ を

$$\epsilon' := \min\{t + u\sqrt{D} \mid t, u > 0,\ (t, u)\text{ は (1) の解 }\}$$

と定義し, $\epsilon' = t + u\sqrt{D}$ を満たす (t, u) を (1) の基本解と呼び, (t_0, u_0) と表す.

さらに, X, Y を整数変数, $\sigma \in \{-1, 1\}$ とする方程式

$$X^2 - DY^2 = 4\sigma \tag{2}$$

に対し, $\epsilon \in \mathbb{R}$ を

$$\epsilon := \min\{\frac{x + y\sqrt{D}}{2} \mid x, y > 0,\ (x, y, \sigma)\text{ は (2) の解 }\}$$

と定義し, $\epsilon = (x + y\sqrt{D})/2$ を満たす (x, y, σ) を (2) の基本解と呼び, (x_0, y_0, σ_0) と表す.

上記の定義より, ペル方程式の基本解を求めるためには, ϵ' を求めればいいことがわかる. そこで, 整数 s, q を

$$s := \begin{cases} 2 & (D \equiv 0, 1 \pmod 4) \\ 1 & (D \equiv 2, 3 \pmod 4), \end{cases} \qquad q := \begin{cases} 0 & (D \not\equiv 1 \pmod 4) \\ 1 & (D \equiv 1 \pmod 4) \end{cases}$$

で定め, 2 次無理数 $\delta = (q + \sqrt{D})/s$ の連分数展開より作られる整数列 $\{G_j\}, \{B_j\}$ とある自然数 n, k を用い, $D \notin \{2, 3, 5, 8, 12\}$ の条件の下で, ϵ' が

$$\epsilon' = \left(\frac{G_n + B_n\sqrt{D}}{s}\right)^k$$

の形で表されることを示す.

また, 本論文では 2 次無理数の連分数展開における基本的な性質であるラグランジュの定理についても証明を与えている.