令和6年度卒業研究概要

ある2つのペル方程式の基本解の関係について

学校教員養成課程　義務教育専攻　算数･数学専修　福井 寿季

$D \in \mathbb{N}$ に対し, 方程式

$$T^2 - DU^2 = 1 \tag{1}$$

をペル方程式と呼び, (1) の解 $(T, U) = (t, u) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の中で $t, u > 0$ かつ $t + u\sqrt{D}$ が最小となるようなものを (1) の基本解という. 本論文では, 平方数でない正の整数 D が $D = f^2 D_0$ (D_0 は平方因子をもたない) と表されるとき, ペル方程式 $T^2 - DU^2 = 1$ の基本解がペル方程式 $T^2 - D_0 U^2 = 1$ の基本解を用いて簡潔に求めることができるという定理について示していく. 具体的な主張は次の通りである.

定理 1. D を平方数でない正の整数とする. また, $D = f^2 D_0$ ($f > 0$, D_0 は平方因子をもたない) とし, $(t, u) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ を $T^2 - D_0 U^2 = 1$ の基本解, T_n, U_n を

$$(t + u\sqrt{D_0})^n = T_n + U_n\sqrt{D_0}$$

で定める. さらに, $g := (f, u)$ とおくとき, $T^2 - DU^2 = 1$ の基本解 $(t', u') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ は

$$t' = T_{w(f/g)},\ u' = \frac{U_{w(f/g)}}{f}$$

で与えられる.

定理の主張に現れる $\omega(n)$ は出現ランクと呼ばれるものである. 本論文の前半ではこの定理を示すことを目標とし, 後半では出現ランクを定義するために必要な, ある数列 $u_n(P, Q)$ に関する次の命題を示すことを目標とする.

命題 1. $m \in \mathbb{N}$ に対し, $(m, Q) = 1$ とする. このとき

$$^{\exists}n \in \mathbb{N} \ \text{ s.t. } \ m \mid u_n(P, Q).$$

ここで, 数列 $u_n(P, Q)$ は次のように定義される: P, Q を $P^2 - 4Q > 0$ をみたす互いに素な整数とし, α, β $(\alpha > \beta)$ を

$$x^2 - Px + Q = 0$$

の解とする. このとき, $n \in \mathbb{N}$ に対し, 数列 $u_n(P, Q)$ を

$$u_n(P, Q) := \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

で定める.