令和 6 年度卒業研究概要

基本解を用いたペル方程式の解について

学校教員養成課程　義務教育専攻　算数･数学専修　松井 空

本論文では, D を平方数でない正の整数とし, 2 つの方程式

$$X^2 - DY^2 = 4\Sigma \ (\Sigma \in \{\pm 1\}), \quad T^2 - DU^2 = 1$$

の整数解について考察する. どちらの方程式にも必ず解が存在することが知られている. そこで, $X^2 - DY^2 = 4\Sigma$ の解の中で, $x_0, y_0 > 0$ かつ $x_0 + y_0\sqrt{D}$ の値が最小となるような (x_0, y_0, σ_0) を $X^2 - DY^2 = 4\Sigma$ の基本解といい, ϵ を

$$\epsilon := \frac{x_0 + y_0\sqrt{D}}{2}$$

で定める. また, $T^2 - DU^2 = 1$ の解の中で, $t_0, u_0 > 0$ かつ $t_0 + u_0\sqrt{D}$ の値が最小となるような (t_0, u_0) を $T^2 - DU^2 = 1$ の基本解といい, ϵ' を

$$\epsilon' := t_0 + u_0\sqrt{D}$$

で定める.

本論文の目標は, 2 つの方程式のすべての解が基本解を用いて与えられるという次の 2 つの定理を示すことである.

定理 1. (x, y, σ) を $X^2 - DY^2 = 4\Sigma$ の解とする. このとき,

$$^{\exists}n \in \mathbb{Z} \ \ \text{s.t.} \ \ \frac{x + y\sqrt{D}}{2} = \pm\epsilon^n.$$

定理 2. (t, u) を $T^2 - DU^2 = 1$ の解とする. このとき,

$$^{\exists}n \in \mathbb{Z} \ \ \text{s.t.} \ \ t + u\sqrt{D} = \pm(\epsilon')^n.$$

また, ϵ と ϵ' に関係を与えた次の定理を証明している.

定理 3. ϵ と ϵ' には次の関係が成り立つ:

$$\epsilon' = \epsilon^k.$$

ここで, k は次で定まる自然数である:

$$k = \begin{cases} 1 & (2 \mid x_0, 2 \mid y_0, \sigma_0 = 1) \\ 2 & (2 \mid x_0, 2 \nmid y_0, \sigma_0 = 1) \\ 2 & (2 \mid x_0, \sigma_0 = -1) \\ 3 & (2 \nmid x_0, \sigma_0 = 1) \\ 6 & (2 \nmid x_0, \sigma_0 = -1). \end{cases}$$