

ペル方程式の非自明解の存在

学校教員養成課程 義務教育専攻 算数・数学専修 中島 悠輔

ゼミでペル方程式に出会い、今まで理解したと認識していた2次方程式にはさらに奥深い世界が広がっていることを知った。理解を深めていく学びに楽しさを覚えたため、ペル方程式の研究を卒業論文のテーマとした。ペル方程式とは、次で定義される2次方程式である。

定義 1. $D \in \mathbb{Z}_{>0}$ (D は平方数でない) に対し、

$$(1) \quad T^2 - DU^2 = 1$$

をペル方程式と呼ぶ。

本論文の前半では、ペル方程式の解に関して基本的な性質である次の定理を証明することを目標とする。

定理 1. ペル方程式 (1) は少なくとも1つの非自明解をもつ。

本論文の後半では、定理1の証明の過程において導入された集合 $S_k(i, j)$ について考察する。ここで、集合 $S_k(i, j)$ は、ある整数 k, i, j を用いて次のように定義される：

$$S := \{(t, u) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |t - u\sqrt{D}| < \frac{1}{|u|}\},$$

$$S_k := \{(t, u) \in S \mid t^2 - Du^2 = k\},$$

$$S_k(i, j) := \{(t, u) \in S_k \mid (t, u) \equiv (i, j) \pmod{k}\}.$$

定理1では、 $S_k(i, j)$ の元を用いて、ペル方程式 (1) の非自明解を1つ構成できることを示すが、ある条件の下では、ペル方程式 (1) の無限個の解が

$$(2) \quad (T, U) = \left(\frac{t_1 t - Du_1 u}{k}, \frac{t_1 u - tu_1}{k} \right)$$

という形で得られることを示す。さらに、 $0 < k \leq \lfloor 1 + 2\sqrt{D} \rfloor$ を満たす k に対し、ペル方程式の解 (2) より作られる

$$\epsilon = \frac{t_1 t - Du_1 u}{k} + \frac{t_1 u - tu_1}{k} \sqrt{D}$$

の値の大きさについて考察する。