令和５年度卒業研究概要

友愛数の組を生成する定理とその一般化

初等教育教員養成課程　数学選修　黒川 弦太

本論文では, 友愛数をテーマとしている．ある２つの自然数が友愛数であるとは, 一方の約数の和が他方の約数の和であり, さらにその値が２つの自然数の和にもなるときをいう．友愛数の組を生成する定理は, サービットの公式や次に述べる定理など, いくつか知られている．

定理 3. $n \in \mathbb{N}$ とする．また,

$$\begin{cases} p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \\ q = 35 \cdot 2^{n+1} - 29 \\ r = 7 \cdot 2^{n-1} - 1 \\ s = 15 \cdot 2^{n+1} - 13 \end{cases}$$

とする．このとき, p, q, r, s がすべて素数ならば,

$$(M, N) = (2^n pq, 2^n rs)$$

は友愛数の組である．

本論文の主定理は, 定理 3 において, 2^{n-1} を u, 2^{n+1} を v と一般化した次の定理である．

定理 4. $w > 1$ をとり, $u, v \in \mathbb{N}$ を, $w^2 = uv, 2 \leq u < v$ を満たすようにとる．また, $B = 2w - \sigma(w)$ とおき,

$$21u(5v - 4)B = 2w(5u + 25v - 21)$$

を満たすと仮定する．さらに,

$$\begin{cases} p = 3u - 1 \\ q = 35v - 29 \\ r = 7u - 1 \\ s = 15v - 13 \end{cases}$$

とする．このとき, p, q, r, s がすべて素数で, かつ, $\gcd(w, p) = \gcd(w, q) = \gcd(w, r) = \gcd(w, s) = 1$ ならば,

$$(M, N) = (wpq, wrs)$$

は友愛数の組である．

さらに本論文では, 定理 3 について, 次も示している．

定理 5. 定理 3 は $n \neq 2$ のとき, 友愛数の組を与えない．