令和５年度卒業研究概要

フィボナッチ数列の倍数項の和について

初等教育教員養成課程　数学選修　壁谷 和樹

本論文の目標は, フィボナッチ数列の第 k 項から第 kn 項までの n 個の k の倍数項の和を求めることである. ここで, フィボナッチ数列とは, 次のように定義される数列である.

定義 1. $n \in \mathbb{N}$ に対し, F_n を

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1$$

と定める. 数列 $\{F_n\}$ をフィボナッチ数列という.

フィボナッチ数列に非常に似ているリュカ数列という数列がある. リュカ数列は, 次のように定義される.

定義 2. $n \in \mathbb{N}$ に対し, L_n を

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n,\ L_1 = 1,\ L_2 = 3$$

と定める. 数列 $\{L_n\}$ をリュカ数列という.

本論文では, k を奇数と偶数の場合に分け, 次の 2 つの定理を証明する.

定理 1. k を奇数とする. $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$F_k + F_{2k} + \cdots + F_{kn} = \frac{1}{L_k}(F_{k(n+1)} + F_{kn} - F_k)$$

が成り立つ.

定理 2. k を偶数とする. $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$F_k + F_{2k} + \cdots + F_{kn} = \begin{cases} \frac{1}{L_{\frac{k}{2}}}(F_{\frac{k}{2}+kn} - F_{\frac{k}{2}}) & (k \equiv 2 \pmod 4) \\ \frac{1}{5F_{\frac{k}{2}}}(L_{\frac{k}{2}+kn} - L_{\frac{k}{2}}) & (k \equiv 0 \pmod 4) \end{cases}$$

が成り立つ.

定理 1 は比較的易しい式変形で証明される. 定理 2 については, 黄金数 $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ に対して, k が $k \equiv 2 \pmod 4$ を満たすときには $\alpha^k - 1 = p\alpha^q$ を満たす有理数 p, q が存在すること, k が $k \equiv 0 \pmod 4$ を満たすときには $\alpha^k - 1 = p\sqrt{5}\alpha^q$ を満たす有理数 p, q が存在することを利用して証明される.