

abc 予想とその周辺

初等教育教員養成課程 数学選修 丸山 華愛

次に述べる定理が, 本論文の主定理である abc 予想である.

定理 1 (abc 予想). $\forall \kappa \in \mathbb{R}_{>1}$ に対し, $\mathbf{abc}[\kappa]$ は有限集合である.

本論文では, まず初めに次の定理が abc 予想と同値であることを示す.

定理 2. $\forall \kappa \in \mathbb{R}_{>1}$ に対し, 次を満たす $M \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在する:

$$\forall (a, b, c) \in \mathbf{abc} \text{ に対し, } c < M(\text{rad}(abc))^\kappa.$$

次に, 次の定理が abc 予想から導かれることを示す.

定理 3. 次を満たす $N \in \mathbb{Z}_{>1}$ が存在する:

$$\forall (a, b, c) \in \mathbf{abc} \text{ に対し, } c < (\text{rad}(abc))^N.$$

次に述べる2つの予想は, abc 予想に関連する未解決な予想である.

予想 1 (強い abc 予想 1). $\forall (a, b, c) \in \mathbf{abc}$ に対し,

$$c < (\text{rad}(abc))^2.$$

予想 2 (強い abc 予想 2). $\forall \kappa \in \mathbb{R}_{>1}$ に対し, $\mathbf{abc}[\kappa]$ の元の個数は有限個であり, そのすべてをリストアップすることができる.

本論文では, 強い abc 予想 1 を用いてフェルマーの最終定理を証明し, また強い abc 予想 2 を用いてビール予想を解決する. ここで, フェルマーの最終定理およびビール予想とは次のような主張である.

定理 5 (フェルマーの最終定理). $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ に対し,

$$x^n + y^n = z^n$$

を満たす $x, y, z \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ は存在しない.

予想 3 (ビール予想). $\forall p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ に対し,

$$x^p + y^q = z^r$$

を満たすどの2つも互いに素な $x, y, z \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ は存在しない.