令和 4 年度卒業研究概要

奇数の完全数の非存在性について

初等教育教員養成課程　数学選修　小野田 恵太

私たちの周りには多くの数が存在し, それぞれの数は多様な性質を持つ. 整数論を学ぶゼミにおいても様々な数を扱ったが, その中でも, 自分自身が自分自身を除く正の約数の和に等しくなるという美しい性質を持つ完全数に興味を持った. そして, 多くは発見されていない点に研究の余地があると感じ, 卒業論文のテーマとした.

本論文では, まず偶数の完全数を決定づける次の定理を証明する.

定理 1. 偶数 n に対し,

$$n\text{ が完全数} \Leftrightarrow {}^{\exists}p : \text{素数} \ \ \text{s.t.} \ \ n = 2^{p-1}(2^p - 1),\ 2^p - 1 : \text{メルセンヌ素数}.$$

この定理により, メルセンヌ素数を見つけることによって偶数の完全数をすべて得ることができる. 一方, 奇数の完全数は未だ発見されておらず, 存在するか否かは未解決問題となっている. そこで, 奇数の完全数の非存在性について考察し, 以下の 4 つの定理および 2 つの系に証明を与えた.

定理 2. 奇素数 p に対し, $p^k\ (k \in \mathbb{N})$ の形をした数は完全数とならない.

定理 3. 相異なる奇素数 $p, q\ (p < q)$ に対し, $p^i q^j\ (i, j \in \mathbb{N})$ の形をした数は完全数とならない.

定理 4. 相異なる奇素数 $p, q, r\ (p < q < r)$ に対し,

$$2(p-1)(q-1) < r$$

をみたすとき, $p^m q^n r^k\ (m, n, k \in \mathbb{N})$ の形をした数は完全数とならない.

系 1. 7 以上の素数 p に対し, $3^m \cdot 5^n \cdot p^k\ (m, n, k \in \mathbb{N})$ の形をした数は完全数とならない.

定理 5. 相異なる奇素数 $p, q, r, s\ (p < q < r < s)$ に対し,

$$2(p-1)(q-1)(r-1) < s,$$
$$\frac{2((p-1)(q-1)+3)+11}{(p-2)(q-2)-2} < r$$

をみたすとき, $p^m q^n r^k s^l\ (m, n, k, l \in \mathbb{N})$ の形をした数は完全数とならない.

系 2. 480 より大きい奇素数 p に対し, $5^m \cdot 7^n \cdot 11^k \cdot p^l\ (m, n, k, l \in \mathbb{N})$ の形をした数は完全数とならない.