令和４年度卒業研究概要

偶数世界における素数と素因数分解について

初等教育教員養成課程　数学選修　糟谷 深琴

本論文では, 以下で定義される偶数世界と, 偶数世界における素数 ($\mathbb{E}$ 素数) について, 素因数分解の考察を行う.

定義 1. すべての偶数を元とする集合, すなわち

$$\mathbb{E} = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

と表される集合 $\mathbb{E}$ を偶数世界と呼ぶ.

定義 2. $\mathbb{E}$ の元 p が $\mathbb{E}$ 素数であるとは, その元が正の数であり, かつ $\mathbb{E}$ のどの元でも割れないことをいう.

偶数世界では, 素因数分解は一意的ではない. そこで本論文では, $\mathbb{E}$ 素数における素因数分解の個数に着目し, その個数が３通り以下となる場合の偶数の形を決定した次の命題を示すことを１つ目の目標とする.

命題 3. $\mathbb{E}$ の正の元 p に対し,

$$p \text{の分解が１通り} \Leftrightarrow p = 2m, 2^n, 2^n k \,(k: \text{奇素数},\ m: \text{正の奇数},\ n: \text{自然数}).$$

命題 4. $\mathbb{E}$ の正の元 p に対し,

$$p \text{の分解が２通り} \Leftrightarrow p = 2^2 k_1^3, 2^n k_1^2, 2^n k_1 k_2 \,(k_i: \text{相異なる奇素数},\ n: 2 \text{以上の自然数}).$$

命題 5. $\mathbb{E}$ の正の元 p に対し,

$$p \text{の分解が３通り} \Leftrightarrow p = 2^2 k_1^2 k_2, 2^2 k_1^4, 2^2 k_1^5, 2^n k_1^3 \,(k_i: \text{相異なる奇素数},\ n: 3 \text{以上の自然数}).$$

そして, 特別な形をした偶数に対して素因数分解の個数を決定した次の２つの定理を証明することを本論文の２つ目の目標とする.

定理 1. $p = 2^2 k^n \,(k: \text{奇素数},\ n: \text{自然数})$ のとき, p の分解を a_n 通りとすると,

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & (n: \text{偶数}) \\ \frac{n+1}{2} & (n: \text{奇数}). \end{cases}$$

定理 2. $p = 2^3 k^n \,(k: \text{奇素数},\ n: \text{自然数})$ のとき, p の分解を a_n 通りとすると,

$$a_{6m+t} = \begin{cases} (m+1)(3m+t) & (t = 1, 2, 3, 4, 5) \\ 3(m+1)(m+2) + 1 & (t = 6). \end{cases}$$