令和 3 年度卒業研究概要

有限体 $\mathbb{F}_p$ 及び複素数体 $\mathbb{C}$ における Gauss 和の値について

中等教育教員養成課程　数学専攻　吉村 隼人

本論文では, 有限体 $\mathbb{F}_p$ 及び複素数体 $\mathbb{C}$ における Gauss 和の値について考察を行うことを目的とした. Gauss 和とは 1 の原始 q 乗根と Legendre 記号を用いて定義される和のことである. $\mathbb{F}_p$ および $\mathbb{C}$ における Gauss 和は次のように定義される.

定義 3. p, q を相異なる奇素数, ζ を $\mathbb{F}_p$ における 1 の原始 q 乗根の 1 つとする. このとき,

$$G_q = \sum_{a=1}^{q-1} \left(\frac{a}{q}\right) \zeta^a$$

を **Gauss 和**という.

定義 5. q を奇素数, ζ を $\mathbb{C}$ における 1 の原始 q 乗根の 1 つとする. このとき,

$$G_q = \sum_{a=1}^{q-1} \left(\frac{a}{q}\right) \zeta^a$$

を **Gauss 和**という.

そして, 本論文の主結果は次である.

定理 1. 有限体 $\mathbb{F}_p$ において p と異なる奇素数 q に対し,

$$G_q^2 = \left(\frac{-1}{q}\right) q = \begin{cases} q & (q \equiv 1 \pmod 4), \\ -q & (q \equiv -1 \pmod 4) \end{cases}$$

となる.

定理 2. $\mathbb{C}$ において q を奇素数, $\zeta = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{q}}$ とする. このとき,

$$G_q = \begin{cases} \sqrt{q} & (q \equiv 1 \pmod 4), \\ \sqrt{-q} & (q \equiv -1 \pmod 4) \end{cases}$$

となる.

最後に, 今後の研究課題を 2 点述べる. 1 点は, 上記定理 1 を定理 2 のような形にすること, すなわち, $\mathbb{F}_p$ における G_q の値を決定することである. もう 1 点は, Gauss 和を任意の自然数 n に対して拡張し, その値がどのようなものになるのかを考察することである. そのための準備として, Legendre 記号の拡張である Jacobi 記号についての性質から学びたいと考える.