令和 3 年度卒業研究概要

等差数列の中の素数と円分多項式の考察

初等教育教員養成課程　数学選修　古林 二千佳

本論文の前半の目標は, 次の 2 つの定理を証明することである.

定理 1. $f(X) = X^2 + 1$ とするとき, 次は同値である:

(i) 素数 p はある整数 n に対する $f(n)$ の素因数となる.

(ii) $p = 2$ または $p \equiv 1 \pmod 4$.

定理 2. l を素数, $f(X) = X^{l-1} + X^{l-2} + \cdots + 1$ とするとき, 次は同値である:

(i) 素数 p はある整数 n に対する $f(n)$ の素因数となる.

(ii) $p = l$ または $p \equiv 1 \pmod l$.

本論文の後半の目標は, 上記定理 2 の l を合成数に拡張することである. 定理 2 に現れる多項式が円分多項式であることを利用し, 数多くの数値実験を行うことで, 次の一般の円分多項式についての定理を得た.

定理 3. m を合成数, $\phi_m(X)$ を m 次の円分多項式とするとき, m と互いに素な素数 p について次は同値である:

(i) 素数 p はある整数 n に対する $\phi_m(n)$ の素因数となる.

(ii) $p \equiv 1 \pmod m$.

さらに, 定理 3 において m と互いに素でない素数が素因数としていつ現れるかを m の形によって場合分けをして調べ, 次の結果を得た.

定理 4. m を合成数, $\phi_m(X)$ を m 次の円分多項式とするとき, 次が成り立つ:

(1) $m = 2q$ (q : 奇素数) のとき, q はある整数 n に対する $\phi_m(n)$ の素因数に現れ, 2 は現れない.

(2) $m = q^r$ (q : 素数, r : 自然数) のとき, q はある整数 n に対する $\phi_m(n)$ の素因数に現れる.

(3) $m = 2q^r$ (q : 奇素数, r : 自然数) のとき, q はある整数 n に対する $\phi_m(n)$ の素因数に現れ, 2 は現れない.

(4) $m = 4q$ (q : 奇素数) のとき, 2 は素因数に現れない. また, $q \equiv 1 \pmod 4$ ならば, q はある整数 n に対する $\phi_m(n)$ の素因数に現れる.