令和 3 年度卒業研究概要

ガウス和を用いた相互法則の証明について

初等教育教員養成課程　数学選修　森藤 優佳

本論文の目標は, 第 1 補充法則、第 2 補充法則, 相互法則を証明することである. 特に, 本論文では, p, q を相異なる奇素数, $\mathbb{F}_p$ 上における ζ を 1 の原始 q 乗根とするとき,

$$G_q = \sum_{a=1}^{q-1} \left(\frac{a}{q}\right) \zeta^a$$

と定義されるガウス和を用いて, 相互法則を証明する.

ここで, 第 1 補充法則と相互法則を述べる.

命題 1 (第 1 補充法則). p を奇素数とする. このとき

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1 & p \equiv 1 \pmod 4 \text{ のとき}, \\ -1 & p \equiv 3 \pmod 4 \text{ のとき}. \end{cases}$$

定理 1 (相互法則). p, q を奇素数とする. このとき

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} = \begin{cases} 1 & p \equiv 1 \pmod 4 \text{ または } q \equiv 1 \pmod 4 \text{ のとき}, \\ -1 & p \equiv q \equiv 3 \pmod 4 \text{ のとき}. \end{cases}$$

命題 1 を用いると, 定理 1 は次の命題と同値であることが示されるため, 本論文では次の命題を証明していく:

命題 23. p, q を奇素数とする.

$$q^* := \left(\frac{-1}{q}\right) q = \begin{cases} q & q \equiv 1 \pmod 4 \text{ のとき}, \\ -q & q \equiv 3 \pmod 4 \text{ のとき} \end{cases}$$

とおくとき,

$$\left(\frac{q^*}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right).$$

命題 23 の証明の鍵となる命題は次の 3 つである:

命題 16. p を奇素数, a を p と互いに素な整数とするとき,

$$\sqrt{a}^p = \left(\frac{a}{p}\right)\sqrt{a}.$$

命題 20. q を奇素数とする. このとき

$$G_q^2 = \left(\frac{-1}{q}\right) q.$$

命題 22. p, q を奇素数とする. このとき

$$G_q^p = \left(\frac{p}{q}\right) G_q.$$