令和３年度卒業研究概要

円分多項式に現れる係数の規則性について

中等教育教員養成課程　数学専攻　大脇 冴

本論文では, 円分多項式の考察を行った. 円分多項式とは, 1 の原始 n 乗根 ζ を用いて, 次のように定義される複素数係数の多項式である.

定義 3. すべての 1 の原始 n 乗根全体を根にもつ多項式

$$\phi_n(X) = \prod_{\substack{1 \leq k < n \\ (k,n)=1}} (X - \zeta^k)$$

を**円分多項式**という.

本論文の前半では, 次の定理の証明を目標とした.

定理 1. 複素数体 $\mathbb{C}$ の中で円分多項式 $\phi_n(X)$ を考えるとき, 次が成り立つ:

(1) $\phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

(2) $\phi_n(X)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約.

(1) は帰納法により, また (2) は原始多項式の性質を用いて示される.

本論文の後半では, 円分多項式の係数に着目し研究を行った. ます初めに, $n = p, 2p, p^m$, $2^m p$ の形のときの円分多項式 $\phi_n(X)$ を明示的に表した. 次に, 以下に述べる 3 つの定理を証明した.

定理 2. $n > 1$ のとき, 円分多項式 $\phi_n(X)$ の定数項は 1 となる.

定理 3. 円分多項式 $\phi_n(X)$ において, $n = pq\,(p, q:$ 素数, $p \neq q)$ のとき, X の係数は -1 である.

定理 4. 円分多項式 $\phi_n(X)$ において, $n = 2pq\,(p, q:$ 奇素数, $p \neq q)$ のとき, X の係数は 1, X^2 の係数は 0, X^3 の係数は 0 である.

また, 数値実験により予想を立てることはできたが, 証明することができなかったものを紹介する.

予想 1. 円分多項式 $\phi_n(X)$ において, $n = 2p_1 \cdots p_r\,(p_i:$ 相異なる奇素数) とする. r が奇数のとき, X の係数は -1, X^2 の係数は 1 であり, r が偶数のとき, X の係数は 1, X^2 の係数は 0 である.