令和 3 年度卒業研究概要

有限体について

中等教育教員養成課程　数学専攻　江口 喬信

本論文の目標は, 有限体の例を具体的に構成し, 有限体の性質や構造の理解を深めることである.

次の命題は, 有限体の位数に関する基本的な命題である.

命題 8. 有限体の位数は, ある素数 p を用いて, p^f $(f \in \mathbb{Z})$ と表される.

この命題の証明の中で, すべての有限体は $\mathbb{F}_p$ の拡大であることや基底の概念が重要であることがわかった. そこで, $\mathbb{F}_p$ の 2 次拡大となる例として $\mathbb{F}_9, \mathbb{F}_{25}, \mathbb{F}_{49}$ を, $\mathbb{F}_p$ の 3 次拡大となる例として $\mathbb{F}_{27}$ を構成し, $\mathbb{F}_p$ 上の基底やそれぞれの乗法群の生成元を与えた.

構成した例を観察することで, 基底に関する次の定理を導いた.

定理 1. p を素数とし, f を $\mathbb{F}_p$ 係数の n 次既約多項式とする. また, ξ を $f(X) = 0$ の根とし,

$$\mathbb{F}_p[\xi] := \{a_0 + a_1\xi + \cdots + a_{n-1}\xi^{n-1} \,|\, a_i \in \mathbb{F}_p\}$$

とおく. このとき, $1, \xi, \ldots, \xi^{n-1}$ は $\mathbb{F}_p[\xi]$ の基底となる.

また, $\mathbb{F}_p$ の 2 次拡大となる $\mathbb{F}_{p^2}$ の乗法群 $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ の生成元の見つけ方について考察し, 次の 2 つの定理を得た.

定理 2. p を奇素数とする. ξ を $\xi \notin \mathbb{F}_p$ かつ $\xi^2 \in \mathbb{F}_p$ を満たす数とし,

$$\mathbb{F}_{p^2} = \{a + b\xi \,|\, a, b \in \mathbb{F}_p\}$$

であるとする. $x = a + b\xi \in \mathbb{F}_{p^2}^\times$ に対し, 次が成り立つ.

(1) $b = 0$ ならば, x は $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ の生成元とならない.

(2) $a = 0$ ならば, x は $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ の生成元とならない.

定理 3. p を奇素数とする. ξ を $\xi \notin \mathbb{F}_p$ かつ $\xi^2 \in \mathbb{F}_p$ を満たす数とし,

$$\mathbb{F}_{p^2} = \{a + b\xi \,|\, a, b \in \mathbb{F}_p\}$$

であるとする. $a + b\xi \in \mathbb{F}_{p^2}^\times$ に対して, 次が同値:

(i) $a + b\xi$ が $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ の生成元となる.

(ii) $a - b\xi$ が $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ の生成元となる.

(iii) $-a + b\xi$ が $\mathbb{F}_{p^2}^\times$ の生成元となる.