令和３年度卒業研究概要

フェルマーの小定理とカーマイケル数・擬素数について

初等教育教員養成課程　数学選修　鈴木 昂也

本論文では, フェルマーの小定理を証明した後, カーマイケル数や擬素数の性質について考察していくことを目的としている. フェルマーの小定理とは, 次の定理である.

定理 1. p を素数とする. $(r, p) = 1$ をみたす任意の整数 r について

$$r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

が成り立つ.

定理 1 は素数 p に対する命題だが, 合成数 n について成り立つ場合もある. そこで, カーマイケル数と呼ばれる合成数を次のように定義する.

定義 7. 合成数 n で, $(a, n) = 1$ をみたす任意の整数 a について

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

が成り立つとき, n をカーマイケル数という.

本論文では, カーマイケル数に関する命題を 3 つ証明した.

命題 8. カーマイケル数は奇数である.

命題 9. カーマイケル数は相異なる素数の積で表される.

命題 11. カーマイケル数は少なくとも 3 つの素因数の積で表される.

さらに, カーマイケル数の条件を少し弱めた擬素数と呼ばれる合成数について考える. 擬素数は次のように定義される.

定義 8. 合成数 n で, $(a, n) = 1$ をみたす整数 a について

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

が成り立つとき, n を a を底とする擬素数という.

擬素数では上の 3 つと同様の命題が成り立たないことが, 具体例により示される.

本論文では, オイラー擬素数と強擬素数についても定義し, 次の命題を述べている.

命題 12. a を底とするオイラー擬素数は, a を底とする擬素数である.

命題 13. a を底とする強擬素数は, a を底とする擬素数である.

命題 14. a を底とする強擬素数は, a を底とするオイラー擬素数である.