平成２４年度卒業研究概要

図形数とペル方程式

中等教育教員養成課程　数学専攻　平岩 篤志

本論文の目標は, ペル方程式の考察, 及び平方三角数, さらには a 角 b 角数についての考察である. ペル方程式は次のように定義される.

定義 1 (ペル方程式)**.** 平方数でない自然数 D に対し,

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

と表される方程式をペル方程式という.

また, 平方三角数は以下のように定義される.

定義 3 (平方三角数)**.** 三角数でありかつ平方数である数を平方三角数と呼ぶ. すなわち, p が平方三角数であるとは,

$$^{\exists}m, n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \ p = \frac{m(m+1)}{2} = n^2$$

であることをいう.

平方三角数を求めることは, あるペル方程式を解くことに帰着される. その解を求めることにより, 次の定理としてすべての平方三角数は与えられる.

定理 3. すべての平方三角数 p は, $x_k + y_k = (3+2\sqrt{2})^k$ $(k \in \mathbb{N})$ で得られる (x_k, y_k) に対して, $p = (x_k - 1)(x_k + 1)/8$ または, $p = y_k^2/4$ とおくことで得られる.

また, この定理を一般化して, 次の結果を得た.

命題 4. m 番目の 6 角数は $2m-1$ 番目の 3 角数である.

命題 5. $x_{2k-1} + y_{2k-1}\sqrt{24} = (5+\sqrt{24})^{2k-1}$ $(k \in \mathbb{N})$ に対し, $m = (x+1)/6, \ n = y$ とおけば, m 番目の 5 角数と n 番目の 4 角数は等しく, それがすべての 4 角 5 角数である.

命題 6. 4 角 10 角数は 1 のみである.

命題 7. $x_{2k} + y_{2k}\sqrt{3} = (5+3\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{2k}$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ なる $x_{2k}, y_{2k} \in \mathbb{N}$ に対して, $m = (x+1)/6, \ n = (y-1)/2$ とおけば, m 番目の 5 角数と n 番目の 3 角数は等しい.

今後の課題として次の二点がある. 一点目は, 1 以外を含むような有限個しかない a 角 b 角数を見つけることである. また, 3 角 5 角数は $x^2 - 3y^2 = -2$ を解くことで得られるが, これはペル方程式ではないため, すべての解を求めることができない. 従って, $x^2 - Dy^2 = M$ の形の方程式を解くことが二点目の課題である.