

平成24年度卒業研究概要

カーマイケル数とカーマイケル数に対するコルセルトの判定法について

中等教育教員養成課程 数学専攻 早川 大将

本論文ではカーマイケル数と呼ばれる合成数を扱う。カーマイケル数とは、フェルマーテストと呼ばれる合成数判定法において、合成数と断定できない合成数のことである。すなわち、カーマイケル数とは以下のように定義される。

定義. 合成数 n がカーマイケル数であるとは、 n が $1 \leq a \leq n$ を満たす全ての整数 a に対して $a^n \equiv a \pmod{n}$ を満たすことである。

カーマイケル数は無限に存在するということが1994年にオールフォード、グランヴィル、ポメランスの3人によって証明されている。本論文ではカーマイケル数の性質やカーマイケル数の生み出し方について考察し、その結果を紹介する。以下で本論文の構成を述べる。

第1節ではカーマイケル数について述べる上で必要とされるフェルマーの小定理の証明を行う。第2節では本論文の主角であるカーマイケル数について述べる。また、カーマイケル数が奇数であることを証明をする。カーマイケル数が奇数であることは、背理法を用いることで証明できる。第3節ではコルセルトの判定法と呼ばれる、合成数 n がカーマイケル数であるかどうかを判定する次の定理を証明する。

定理. 合成数 n がカーマイケル数であるための必要十分条件は、 n を割る奇素数 p の全てが条件

$$(i) p^2 \nmid n$$

$$(ii) p - 1 \mid n - 1$$

を満たすことである。

このコルセルトの判定法は、本論文においてカーマイケル数に関する命題の証明に用いられている。第4節では、チャーニックによって発見されたカーマイケル数を生み出す方法を紹介する。さらに、カーマイケル数を生み出す式の生み出し方についての考察として、対称式を用いた考え方を紹介する。

この卒業研究においては、発見されていないようなカーマイケル数を生み出す式を作り出すことはできなかったが、それは今後の研究課題である。