平成２４年度卒業研究概要

ある逆数和の分子について

中等教育教員養成課程　数学専攻　橋本 直幸

本論文の目標は, ある逆数和の分子について, どのような性質を持つのかを考察するものである. ある逆数和の分子とは, m を 3 以上の正の整数とし, $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}$ を 1 以上 m 以下の範囲にある m と互いに素な整数とする. このとき

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{\varphi(m)}} = \frac{A_m}{B_m}\ (\frac{A_m}{B_m}\text{は既約分数})$$

と表したときの, A_m のことである. この A_m が法を m または, m^2 としたときに 0 と合同となるかどうかを考察する.

法を m としたときには, 次が成り立つ.

定理 1. m を 3 以上の正の整数とし, $a_1, a_2, \ldots, a_{\varphi(m)}$ を 1 以上 m 以下の範囲にある m と互いに素な整数とする. このとき

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{\varphi(m)}} = \frac{A_m}{B_m}\ (\frac{A_m}{B_m}\text{は既約分数})$$

と表したとき, $A_m \equiv 0 \pmod{m}$ が成り立つ.

第 1 節では, 上記定理の証明の準備として, 整数に対しての基本的な性質である算術の基本定理を示す. さらに, 中国の剰余定理, 一次合同式定理を示した後, オイラー関数を定義し, その性質を述べる. 第 2 節では, この論文の目標である上記定理の証明を行う. 第 3 節では, 定理における分子 A_m 及び分母 B_m を $3 \leq m \leq 50$ の範囲に対して, 数表として載せる.

法を m^2 とした場合は, 第 3 節の数表とさらに多くの数値実験により, 次の予想を得た.

予想. (1) m が 10 の倍数であり, 3 の倍数でなければ, $A_m \equiv 0 \pmod{m^2}$ を満たす.

(2) x を素数かつ $x \equiv 1 \pmod{12}$ を満たす数とする. m が x の倍数ならば, $A_m \equiv 0 \pmod{m^2}$ を満たす.

(1) は, m が 40000 以下まで確認できている. (2) については, $x \leq 109$ かつ $m \leq 2000$ の範囲で確認できている. 今回の卒業論文では, この予想を証明することはできなかったが, 今後の課題として取り組んでいきたい.